Afleiding van het continuïteitsprincipe uit symmetrieën

De stelling van Tellegen is een van de belangrijkste stellingen uit de ingenieurswetenschappen. Deze energiestelling is spijts haar eenvoud zeer algemeen geldig en men kan er heel wat bekende en minder bekende netwerkstellingen uit afleiden.[1] Bij het bewijs van de stelling van Tellegen vertrekt men van de wetten van Kirchhoff en van het continuteitsprincipe voor stromen. Deze wetten en dit beginsel worden uit de fysica afgeleid (het behoud van lading en de definitie van potentiaal).

Het zou intellectueel mooi zijn moesten we deze stelling kunnen funderen op symmetrieën en invarianten. Het gaat om fundamentele, kwalitatieve beginselen die voorwaarden zijn voor objectieve kennis en inductieve generalisatie. Dergelijke eerder (wetenschaps-) filosofische uitgangspunten werden o.m. ook door Emmy Noether gebruikt om de wetten van het behoud van hoeveelheid van beweging en van energie in de mechanica te bewijzen.[2]

Het continuïteitsprincipe speelt een belangrijke rol bij de studie van stromingen van vloeistoffen en gassen. Het wordt o.m. toegepast bij de berekening van straalpijpen en turbines. Men kan een analoge vorm van dit beginsel beschouwen: het continuïteitsprincipe voor elektrische stromen. Dit continuïteitsprincipe is een bijzonder geval van de stroomwet van Kirchhoff.

In deze tekst wordt het resultaat gegeven van de zoektocht naar een bewijs voor het continuïteitsprincipe dat in het domein van elektrische netwerken voor verbindingen en voor elementen (zoals bijvoorbeeld weerstanden) geldt en dat op symmetrieën gebaseerd is. Om de oplossing te vinden werd tevens gebruik gemaakt van functionele vergelijkingen en van de eigenschappen van "involutions". Dit bewijs kan ook uitgebreid worden voor o.m. de derde wet van Newton.[3]

Indien aangenomen wordt dat het continuïteitsprincipe voor stromen onafhankelijk van spanningen kan geformuleerd worden, dan kan dit beginsel uit symmetrieën afgeleid worden. Dit wordt als volgt bewezen:

Beschouw een verbinding of element met stromen I_1 en I_2 door de terminals 1 en 2.
We stellen dat:

$F(I_1, I_2) = 0$ ....(1)

Omwille van symmetrie kunnen we eveneens schrijven dat:

$F(I_2, I_1) = 0$ ....(2)

De keuze van welke stroom I_1 is en welke stroom I_2 wordt immers niet door de fysica van het knooppunt bepaald maar is louter arbitrair. We mogen dus I_1 en I_2 omwisselen en bovendien de functies in beide vergelijkingen gelijk stellen. Twee waarnemers die een verschillende keuze maken van welke stroom ze I_1 en I_2 noemen, moeten immers dezelfde relatie vinden.

De vergelijkingen (1) en (2) kunnen omgevormd worden in:

$I_1 = f(I_2)$ ....(3)

$I_2 = f(I_1)$ ....(4)

Uit (3) en (4) kan afgeleid worden dat:

$I_1 = f[f(I_1)]$

Een oplossing van een functionele vergelijking van de vorm $x = f[f(x)]$ wordt een "involutary function" genoemd en men heeft het over een "involution".[4]

Daar de tekendefinitie van de stromen I_1 en I_2 arbitrair gekozen werd, nemen we aan dat de functie f ook geldig indien we de tekens van de stromen in (3) omkeren:

$-I_1 = f(-I_2)$

of :

$- f(I_2) = f(-I_2)$

De functie f is dus een oneven functie.

Voor een oneven continue "involution" f(x) geldt volgens Wiener en Watkins[5] dat $f(x) = -x$.

Uit (3) volgt dan dat:

$I_1 = -I_2$

wat moest bewezen worden.

Noteer tot slot nog dat:

- ook aangenomen wordt dat het continuïteitsbeginsel niet in de tijd verandert en dat de stromen op een bepaald tijdstip geen invloed hebben op de stromen op een ander tijdstip.

- de stroomwet van Kirchhoff eigenlijk een meer algemene vorm is van het continuïteitsprincipe voor stromen. Indien de stroomwet van Kirchhoff toegepast wordt op een eenvoudige verbinding in plaats van op een vertakking bekomt men het continuïteitsprincipe.

- men voor de spanningsverschillen tussen de terminals 1 en 2 op gelijkaardige manier kan aantonen dat:

$U_{12} = -U_{21}$

- in het geval van een verbinding voor de spanningen t.o.v. een referentiepunt 0 ook geldt dat:

$U_{10} = -U_{02}$

Deze vergelijking geldt echter niet voor een element. In dit geval zijn de spanningen U_{10} en U_{02} immers niet onafhankelijk van de stromen, is de functie $U_{10} = f(U_{02})$ niet geldig en heeft men met geen oneven continue "involution" te doen.

- de algemene relatie tussen U_{10} en U_{02} op een andere manier kan bewezen worden. Zie Appendix.

- het continuïteitsprincipe voor stromen in het geval van een verbinding gebruikt wordt bij de afleiding van de wetten van Kirchhoff uit symmetrieën.[6]

Appendix

Beschouw een (vrij) element met terminals 1 en 2 en twee referentiepunten 0 en 0'. We definiëren vervolgens een spanningsverschil U_{20} - U_{10} .

Dit spanningsverschil moet invariant zijn t.o.v. het referentiepunt van de meting [7]:

$U_{20} - U_{10} = U_{20'} - U_{10'}$ .... (5)

Laten we referentiepunt 0' samenvallen met de terminal 1 dan kunnen we als (5) algemeen geldt schrijven dat:

$U_{20} - U_{10} = U_{21} - U_{11} = U_{21}$ .... (6)

daar $U_{11} = 0$

Het spanningsverschil tussen twee samenvallende punten kan immers als nul beschouwd worden.

Laten we referentiepunt 0' vervolgens samenvallen met de terminal 2 dan vinden we dat:

$U_{20} - U_{10} = U_{22} - U_{12} = - U_{12}$ .... (7)

daar $U_{22} = 0$

Uit (6) en (7) volgt dat:

$U_{21} = - U_{12}$ .... (8)

Om symmetrieredenen mogen we eveneens schrijven dat:

$U_{10} = - U_{01}$ .... (9)

en:

$U_{20} = - U_{02}$ .... (10)

De terminals die we 2 of 1 noemden hadden we immers ook als referentiepunt 0 kunnen kiezen.

Uit (6), (8), (9) en (10) volgt dan dat:

$U_{10} + U_{02} + U_{21} = 0$

en:

$U_{01} + U_{20} + U_{12} = 0$

Deze laatste twee vergelijkingen komen met de spanningswet van Kirchhoff voor een vrij element overeen.

Voor een verbinding wordt $U_{21} = 0$ en vindt men dat $U_{10} = -U_{02}$ of ook dat $U_{10} = U_{20}$.

Noten

1. Zie: *Paul Penfield, Robert Spence and Simon Duinker, Tellegen's Theorem and Electrical Networks, Research Monograph No. 58, The M.I.T Press, Cambridge Massachusetts, 1970*.
Voor het bewijs van de stelling van Tellegen kunnen we ook verwijzen naar:
http://en.wikipedia.org/wiki/Tellegen 's_theorem .
Een beknopte situering van de stelling van Tellegen is te vinden in:
http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/vanbelle-tel.html .

2. Emmy Noether legde het verband tussen symmetrieën en behoudswetten. Symmetrieën geven aan dat bepaalde relaties onveranderd blijven bij een transformatie. De natuurwetten moeten invariant zijn voor de oriëntatie van de meettoestellen, de plaats van de meting en het ogenblik van het experiment. Uit deze drie invariantiebeginselen leidde Emmy Noether het behoud van hoeveelheid van beweging (in het geval van rotatie en rechtlijnige verplaatsing) en het behoud van energie af.

3. Volgens de Firestone analogie is het continuïteitsprincipe voor stromen immers analoog aan de derde wet van Newton: een actie is op het teken na gelijk aan de reactie. De meer algemene stroomwet van Kirchhoff is analoog aan de evenwichtsvoorwaarde uit de statica.

4. "An involution is a mathematical operation, such as negation, which, when applied to itself, returns the original number. An involution is its own inverse." Voor een "involution" geldt dus ook dat: $f(x) = f^{-1}(x)$. Oplossingen van deze vergelijking zijn o.m. de functies: $-x$, $c - x$ en $1/x$.

5. De eigenschappen van "involutions" zijn te vinden in: *Joseph Wiener and Will Watkins, "A glimpse into the wonderland of involutions".* Zie: http://eqworld.ipmnet.ru/en/education/wiener.pdf .

6. Bij het afleiden van de stroom- en spanningwet van Kirchhoff uit symmetrieën namen we zonder bewijs aan dat het continuïteitsbeginsel voor een verbinding geldig is. Zie:
http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/kirchhoff.pdf .

7. Een spanning wordt bepaald als een potentiaalverschil van een punt t.o.v. een referentiepunt. Een potentiaal is slechts op een constante na bepaald en een absoluut referentiepunt bestaat niet. Dit verduidelijkt de invariantie die gebruikt wordt om de spanningswet af te leiden.

Met dank aan prof. Farid Al-Bender voor de hint i.v.m. oneven fucties .

Hubert Van Belle

2/06/2010
21/12/2010
23/01/2011 verduidelijking
9/01/2012