# Afleiding van de wetten van Kirchhoff uit symmetrieën

De stelling van Tellegen is een van de belangrijkste stellingen uit de ingenieurswetenschappen. Deze energiestelling is zeer algemeen. In haar eenvoudigste vorm geeft de stelling van Tellegen het behoud van de energie weer die over de componenten van een elektrisch netwerk verdeeld wordt. De balans van de door de actieve elementen toegevoerde energie en van de in de passieve elementen opgenomen energie moet sluitend zijn. Meer algemeen drukt de stelling van Tellegen de ortogonaliteit van de stromen en spanningen in toegevoegde elektrische netwerken uit. Aangezien een netwerk en zijn toegevoegd netwerk dezelfde topologie hebben, staat de vector van de stromen in het ene netwerk loodrecht op de spanningsvector in het andere.[1]

Bij het bewijs van de stelling van Tellegen vertrekt men van de wetten van Kirchhoff. Deze wetten worden uit de fysica afgeleid (het behoud van lading en de definitie van potentiaal). Het zou intellectueel mooi zijn moesten we deze stelling kunnen funderen op symmetrieën en invarianten. Dergelijke eerder (wetenschaps-) filosofische uitgangspunten werden o.m. ook door Emmy Noether gebruikt om de wetten van het behoud van hoeveelheid van beweging en van energie in de mechanica te bewijzen.[2]

In deze tekst wordt het resultaat gegeven van de zoektocht naar een bewijs van de wetten van Kirchhoff dat op symmetrieën en invarianten gebaseerd is. Bij het vinden van de oplossing werd tevens gebruik gemaakt van functionele vergelijkingen. Dit bewijs ook kan uitgebreid worden voor o.m. de evenwichts- en verenigbaarheidsvoorwaarden uit de mechanica.[3]

Indien aangenomen wordt dat de stroomwet en de spanningswet van Kirchhoff ontkoppeld zijn, dat deze wetten niet in de tijd veranderen en dat de stromen en spanningen op een bepaald tijdstip geen invloed hebben op de stromen en spanningen op een ander tijdstip, dan kunnen de beide wetten uit symmetrieën of invarianten afgeleid worden. Dit wordt in de volgende punten bewezen.

## 1. De stroomwet.

Beschouw een knooppunt met drie takken en stromen $I_1$, $I_2$ en $I_3$ die op hetzelfde tijdstip bepaald worden.

We stellen dat $I_3 = F(I_1, I_2)$

Daar deze fysische functie schaalinvariant moet zijn geldt dat [4]:

$a.I_3 = F(a.I_1, a.I_2)$

De functie F is dus een homogene functie van de eerste graad.

Stel:

$a = 1/I_1$

dan volgt uit de vorige vergelijking dat [5]:

$I_3/ I_1 = F(1, I_2/ I_1)$

Na het invoeren van een functie:

$f(x) = F(1, x)$

wordt deze vergelijking herleid tot:

$I_3 = I_1.f(I_2/I_1)$ .... (1)

Omwille van symmetrie (en mits een gepaste tekenconventie) kunnen we eveneens schrijven dat :

$I_2 = I_1.f(I_3/I_1)$ .... (2)

De keuze van welke stroom $I_3$ is en welke stroom $I_2$ wordt immers niet door de fysica van het knooppunt bepaald maar is louter arbitrair. We mogen dus $I_3$ en $I_2$ omwisselen en bovendien de functies in beide vergelijkingen gelijk stellen.

Partiële differentiatie van (1) van $I_3$ naar $I_1$ en naar $I_2$ leidt met de kettingregel tot:

$\delta I_3 /\delta I_1 = f(I_2/I_1) - (I_2/I_1) . f'(I_2/ I_1)$

en:

$\delta I_3 /\delta I_2 = f'(I_2/ I_1)$

Om symmetrieredenen geldt ook dat:

$\delta I_3 /\delta I_1 = \delta I_3 /\delta I_2$

De gevoeligheid van $I_3$ voor een wijziging van $I_1$ (met constante $I_2$) is gelijk aan de gevoeligheid van $I_3$ voor een wijziging van $I_2$ (met constant $I_1$) . Er is geen fysische reden waarom dit niet zo zou zijn. Nadat de tak met de stroom die men $I_3$ noemt gekozen werd, bestaat er immers geen onderscheid meer tussen de overblijvende twee takken en is de keuze arbitrair van welke stromen we $I_1$ en $I_2$ noemen.

Uit de vorige drie vergelijkingen kan men afleiden dat:

$f(I_2/I_1) = (1+ I_2/ I_1). f'(I_2/ I_1)$ .... (3)

Dit is een differentiaalvergelijking van de vorm:

$y = (1+x). dy /dx$

of:

$dy/y = dx/(1+x)$

Men kan eveneens schrijven dat:

$dy/y = d(1+x)/(1+x)$

Na integratie van beide termen vinden we dat:

$\ln y = \ln (1+x) + c$

voor $y > 0$ en $(1+x) > 0$ .

Stellen we de constante c gelijk aan:

$c = \ln k$

met $k > 0$, dan wordt:

$\ln y = \ln (1+x) + \ln k$

Hieruit volgt dat:

$y = k.(1+x)$

De oplossing van de differentiaalvergelijking (3) worden dan:

$f(I_2/I_1) = k .(1+ I_2/ I_1)$

Bijgevolg wordt de oplossing van de functionele vergelijking (1) gegeven door:

$I_3 = k. I_1. (1+ I_2/ I_1)$

Na vereenvoudiging vinden we :

$I_3 = k. (I_1+ I_2)$ ....(4)

We kunnen nog een bijkomende voorwaarde afleiden door één van de stromen gelijk aan nul te stellen. De vergelijkingen (4) moet ook voor dit bijzonder geval opgaan. Eén van de takken is dan stroomloos zodat het eigenlijk niet meer om een knooppunt maar om een verbinding gaat.

Stel $I_2 = 0$

dan geldt volgens het continuïteitsprincipe dat [6]:

$I_3 = I_1$

Uit (4) volgt dat deze bijkomende voorwaarde tot een oplossing $k = 1$ leidt (die aan de voorwaarde $k > 0$ voldoet).

Na het invoeren van $k = 1$ in de vergelijking (4) kunnen we dus besluiten dat :

$I_3 = (I_1+ I_2)$ .... (5)

wat moest bewezen worden.

Noteer tot slot nog dat:

- het bewijs gemakkelijk kan uitgebreid worden voor knooppunten met meer dan drie takken. Daartoe ontbinden we het knooppunt in verschillende aan elkander gekoppelde kooppunten met telkens drie takken. Het knooppunt wordt zo omgevormd tot een reeks met onderling verbonden vertakkingen. Vertrekkend van een eerste knooppunt met drie takken worden de andere vertakkingen één na één met elkaar verbonden.

- we het bewijs ook kunnen uitbreiden van een knooppunt naar een in een black-box opgenomen netwerk.

- uit (1) en (2) kan afgeleid worden dat $I_3/I_1 = f[f(I_3/I_1)]$ . Een oplossing van een functionele vergelijking van de vorm $x = f[f(x)]$ wordt een "involutary function" genoemd en men heeft het over een "involution". Voor een "involution" geldt ook dat: $f(x) = f^{-1}(x)$ .[7]

- we ook nog op een andere manier kunnen verduidelijken dat de gevoeligheid van $I_3$ voor een wijziging van $I_1$ gelijk is aan de gevoeligheid van $I_3$ voor een wijziging van $I_2$ . Twee waarnemers a en b die de gevoeligheid van $I_3$ naar $I_1$ bepalen maar een verschillende keuze gemaakt hebben van welke stroom ze $I_1$ en $I_2$ noemen, moeten hetzelfde resultaat bekomen. Indien we bijvoorbeeld zouden aannemen dat de gevoeligheid van $I_3$ voor een wijziging van $I_1$ groter is dan de gevoeligheid van $I_3$ voor een wijziging van $I_2$ dan bekomen de twee waarnemers tegenstrijdige resultaten. Inderdaad, uit:

$\delta I_{3a} / \delta I_{1a} > \delta I_{3a} / \delta I_{2a}$

$\delta I_{3b} / \delta I_{1b} > \delta I_{3b} / \delta I_{2b}$

met $I_{3a} = I_{3b}$ , $I_{1a} = I_{2b}$ en $I_{2a} = I_{1b}$ volgt immers uit de eerste ongelijkheid dat:

$\delta I_{3b} / \delta I_{2b} > \delta I_{3b} / \delta I_{1b}$

Dit is in tegenspraak met de tweede ongelijkheid.

- om aan de voorwaarden $y > 0$ en $(1+x) > 0$ te kunnen voldoen een gepaste tekenconventie voor de stromen $I_1$, $I_2$ en $I_3$ vereist is. Indien de tekenconventies zo gekozen worden dat deze stromen positief zijn dan worden $I_3/I_1$ en $(1+ I_2/I_1)$ groter dan nul en is aan deze voorwaarden voldaan (het bijzonder geval $I_3 = 0$ uitgezonderd). Meestal volgt men een andere tekenconventie en wordt de vergelijking (5) omgevormd tot $I_3 = -(I_1+ I_2)$ of $I_1+ I_2 + I_3 = 0$ . Dit is de bekendste vorm van de stroomwet van Kirchhoff.

- de stroomwet van Kirchhoff soms aangetoond wordt uitgaande van de onmogelijkheid van het perpetuum mobile. Simon Stevin bewees het krachtenevenwicht eveneens door het afwijzen van de eeuwigdurend beweging.

**2. De spanningswet.**

De spanningswet kan op een gelijkaardige wijze als de stroomwet bewezen worden.

Men kan de spanningwet echter ook op een alternatieve manier bewijzen uitgaande van de invariantie van een verschil van twee spanningen t.o.v. het referentiepunt dat bij de meting van deze spanningen gebruikt wordt.

Beschouw daartoe de terminals 1, 2 en 3 en twee referentiepunten 0 en 0' met spanningen $U_{10}$ , $U_{20}$ . $U_{10'}$ en $U_{20'}$ die op hetzelfde tijdstip bepaald worden. We definiëren vervolgens een spanningsverschil $U_{20} - U_{10}$ .

Dit spanningsverschil moet invariant zijn t.o.v. het referentiepunt van de meting:

$U_{20} - U_{10} = U_{20'} - U_{10'}$ .... (6)

Laten we referentiepunt 0' samenvallen met terminal 1 dan kunnen we als (6) algemeen geldt schrijven dat:

$U_{20} - U_{10} = U_{21} - U_{11} = U_{21}$ .... (7)

daar $U_{11} = 0$

Het spanningsverschil tussen twee samenvallende punten kan immers als 0 beschouwd worden.

Laten we referentiepunt 0' vervolgens samenvallen met terminal 2 dan vinden we dat:

$U_{20} - U_{10} = U_{22} - U_{12} = - U_{12}$ .... (8)

daar $U_{22} = 0$

Uit (7) en (8) volgt dat:

$U_{21} = - U_{12}$ .... (9)

Omwille van invariantie voor de nummering van de terminals kunnen we ook schrijven dat:

$U_{32} = - U_{23}$ .... (10)

en:

$U_{13} = - U_{31}$ .... (11)

Uit (7) volgt bovendien dat:

$U_{20} - U_{10} - U_{21} = 0$

Laten we het referentiepunt 0 met de terminal 3 samenvallen dan wordt deze vergelijking omgevormd tot:

$U_{23} - U_{13} - U_{21} = 0$

Rekening houdend met (9), (10) en (11) vinden we tenslotte dat:

$U_{21} + U_{32} + U_{13} = 0$

of:

$U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0$

wat moest bewezen worden.

Merk op dat:

- een spanning bepaald wordt als een potentiaalverschil van een punt t.o.v. een referentiepunt. Een potentiaal is slechts op een constante na bepaald en een absoluut referentiepunt bestaat niet. Dit verduidelijkt de invariantie die gebruikt wordt om de spanningswet af te leiden. Een dergelijke invariantie geldt ook voor een positieverschil in de eendimensionale ruimte.

- er voor de stroomwet geen analoge invariantie kon gevonden worden.

- de spanningswet dus kan afgeleid worden zonder stromen in rekening te brengen. In het bewijs van de stoomwet daarentegen, werd van een ontkoppeling t.o.v. de spanningswet uitgegaan en beschouwden we alleen de relatie tussen stromen.

- we nog geen bewijs gevonden hebben, eventueel met andere symmetrieën, die het mogelijk maken om de aanname te vermijden dat er een stroomwet kan geformuleerd worden zonder spanningen in rekening te brengen.

**Noten**

1. Zie: *Paul Penfield, Robert Spence and Simon Duinker, Tellegen's Theorem and Electrical Networks, Research Monograph No. 58, The M.I.T Press, Cambridge Massachusetts, 1970*. Een beknopte situering van de stelling van Tellegen is te vinden in: http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/vanbelle-tel.html .

2. Emmy Noether legde het verband tussen symmetrieën en behoudswetten. Symmetrieën geven aan dat bepaalde relaties onveranderd blijven bij een transformatie. De natuurwetten moeten invariant zijn voor de oriëntatie van de meettoestellen, de plaats van de meting en het ogenblik van het experiment. Uit deze drie invariantiebeginselen leidde Emmy Noether het behoud van hoeveelheid van beweging (in het geval van rotatie en rechtlijnige verplaatsing) en het behoud van energie af.

3. De evenwichts- en verenigbaarheidsvoorwaarden zijn immers analoog aan de stoom- en spanningswet van Kirchhoff. De op deze voorwaarden gebaseerde stelling der virtuele arbeid is eveneens analoog aan de stelling van Tellegen. Er bestaan ook analoge vormen van de stelling van Tellegen voor elektromagnetische velden, voor golffuncties uit de kwantummechanica, ...[1]

4. Fysische wetten dienen invariant te zijn voor de grootte van de eenheden. Een wet moet dus geldig blijven indien de eenheden anders gekozen worden. Niet alle wiskundige modellen kunnen bijgevolg met een fysische wet overeenkomen.

5. Deze methode wordt o.m. in de economie gebruikt bij de studie van productiefuncties. Zie: *R.G.D. Allen, "Mathematical Analysis for Economists", Macmillan and Co, London, 1950, p. 317.*

6. Het continuïteitsprincipe voor een verbinding kan ook uit symmetrieën afgeleid worden. Zie: http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/continuiteitsprincipe.pdf .
De tekenconventie werd echter gewijzigd.

7. "An involution is a mathematical operation, such as negation, which, when applied to itself, returns the original number. An involution is its own inverse." De eigenschappen van "involutions" zijn te vinden in: *Joseph Wiener and Will Watkins, "A glimpse into the wonderland of involutions".* Zie: http://eqworld.ipmnet.ru/en/education/wiener.pdf .

*Met dank voor de stimulerende discussie aan prof. Joos Vandewalle en prof. Farid Al-Bender.*

Hubert Van Belle

20/05/2010
14/12/2010 correctie
21/12/2010 correctie
23/01/2011 verduidelijking
9/01/2012
8/07/2012