# Invarianties en symmetrieën voor meetresultaten

*In deze tekst wordt een afleiding van relaties in de vorm van de wetten van Kirchhoff voorgesteld waarbij uitgegaan wordt van invarianties en symmetrieën voor meetresultaten. De wetten van Kirchhoff zijn verbindingswetten uit de elektrische netwerktheorie die een opvallend eenvoudige vorm vertonen. Buiten de elektrische netwerktheorie vindt men ook wetten met een gelijkaardige vorm terug in andere domeinen van de wetenschap. Bovendien blijken er analoge wetten voor meetresultaten te gelden. Dit wijst op de mogelijkheid om een overkoepelende theorie te ontwikkelen en diverse theorieën te unificeren. Het is vreemd dat daarbij geen beroep moet gedaan worden op de fysica.*

## *1. De wetten van Kirchhoff*

De wetten van Kirchhoff spelen een belangrijke rol in de theorie van de elektrische netwerken. Het gaat om verbindingswetten die samen met de modellen van de componenten het gedrag van het netwerk beschrijven. Een netwerk bestaat uit takken die in knooppunten met elkaar verbonden zijn. In een eenvoudig netwerk beschouwt men componenten met twee aansluitingen als tak. Over een tak staat er een spanning en doorheen de tak vloeit er een stroom. De stroomwet van Kirchhoff legt de relatie vast tussen de stromen in een knooppunt van een netwerk. De spanningswet bepaalt het verband tussen de spanningen over de takken van een maas (gesloten lus) van het netwerk.

De spanningswet van Kirchhoff kan zeer gemakkelijk afgeleid worden uitgaande van het potentiaalbegrip. Een elektrische spanning tussen twee knooppunten wordt gedefinieerd als het potentiaalverschil tussen deze knooppunten. Beschouw drie knooppunten 1, 2 en 3 die verbonden zijn door takken welke samen een gesloten lus vormen. Als we het potentiaal in deze knooppunten $V_1$, $V_2$ en $V_3$ noemen dan geldt voor de spanning over de takken:

$$U_{12} = V_1 - V_2$$
$$U_{23} = V_2 - V_3$$
$$U_{31} = V_3 - V_1$$

Worden deze vergelijkingen opgeteld dan vinden we onmiddellijk:

$$U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0 \qquad (1)$$

Deze vergelijking drukt de spanningswet van Kirchhoff uit. De som van de spanningen over takken van een maas is gelijk aan nul (mits de gepaste tekenconventie). In de elektriciteitsleer wordt spanningwet verklaard met het potentiaalbegrip en de definitie van spanning.

Een minder bekende vorm van de spanningswet Kirchhoff wordt bekomen door voor de kooppunten 1, 2 en 3 de spanningen $U_{10}$ , $U_{20}$ en $U_{30}$ te beschouwen die ten opzichte van een gemeenschappelijk referentiepunt 0 gemeten worden. Het is duidelijk dat:

$$(U_{10} - U_{20}) + (U_{20} - U_{30}) + (U_{30} - U_{10}) = 0 \qquad (2)$$

De stroomwet van Kirchhoff voor planaire netwerken kan eveneens eenvoudig afgeleid worden gebaseerd op de definitie van maasstromen. In de 'mesh current method' voor de analyse van planaire netwerken definieert men een stroom in ieder van de gesloten lussen die een maas vormen.[1] Planaire netwerken kunnen op een blad getekend worden zonder dat de takken elkaar kruisen. De maasstromen zijn in feite fictief. In een tak die deel uitmaakt van de mazen i en j vloeien de maasstromen $J_i$ en $J_j$ in tegengestelde zin. Voor een knooppunt waarin drie takken samenkomen kunnen we dan voor de takstromen $I_{21}$ , $I_{32}$ en $I_{13}$ schrijven dat[2]:

$I_{12} = J_1 - J_2$
$I_{23} = J_2 - J_3$
$I_{31} = J_3 - J_1$

Het optellen van deze vergelijkingen leidt tot:

$$I_{12} + I_{23} + I_{31} = 0 \qquad (3)$$

Deze vergelijking geeft de stroomwet van Kirchhoff voor een knooppunt met drie takken weer. De som van de stromen in een knooppunt is gelijk aan nul (mits de gepaste tekenconventie). De stroomwet wordt in de elektriciteitsleer verklaard met de wet van behoud van lading. Daar de ladingen die een knooppunt binnenstromen het knooppunt ook weer verlaten is de balans sluitend. De stroomwet drukt dus een continuïteitsprincipe uit.

De wetten van Kirchhoff zijn opvallend eenvoudig van vorm. Het gaat om lineaire wetten. Ze leiden tot de stelling van Tellegen, een zeer krachtige maar op het eerste zicht vreemde energiestelling, waaruit veel stellingen van de elektrische netwerktheorie kunnen afgeleid worden.[3] Deze stelling is eenvoudig te bewijzen. Een veralgemening van de stelling van Tellegen voor systemen is de stelling van Lee.[4]

Merk op dat stroomwet en de spanningswet van Kirchhoff elkaars duale zijn. Indien we de spanningen en stromen omwisselen dan worden deze wetten in elkaar getransformeerd. Deze merkwaardige eigenschap kan als een vorm van analogie beschouwd worden.

## *2. Analoge wetten en unificatie van wetenschappen*

Het is ook merkwaardig dat we de vorm van de wetten van Kirchhoff kunnen vinden voor de knooppuntnummers van een netwerk. Beschouw bijvoorbeeld de knooppunten i, j en k met nummers $N_i$, $N_j$ en $N_k$ dan kunnen we schrijven dat:

---

[1] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Mesh_analysis
[2] Voor meer informatie over de relatie tussen maasstromen en takstromen zie blz. 3 en 4 in: https://www.vub.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/verbindingswetten.pdf
[3] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Tellegen%27s_theorem en http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.205.5980&rep=rep1&type=pdf
[4] Zie: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=C3F8056E5448D582846D6F5A5CBE9AAD?doi=10.1.1.212.5406&rep=rep1&type=pdf blz. 1907

$(N_i - N_j) + (N_j - N_k) + (N_k - N_i) = 0$

Stellen we:

$N_{ij} = (N_i - N_j)$
$N_{jk} = (N_j - N_K)$
$N_{ki} = (N_k - N_i)$

dan leidt dit onmiddellijk tot een vergelijking met de vorm van de wetten van Kirchhoff[5]:

$N_{ij} + N_{jk} + N_{ki} = 0$

Dit wijst er op dat we ook wetten voor reeksen van getallen kunnen formuleren met de vorm van de wetten van Kirchhoff. Dit wordt in de Appendix verduidelijkt.

Voor het afleiden van de wetten van Kirchhoff moet men zich niet op de wiskundige modellen van de fysica te baseren. Het is mogelijk om deze wetten direct uit de eigenschappen van reeksen van reële getallen af te leiden. Zoals in de Appendix aangetoond wordt kunnen we in getallenreeksen invarianties en symmetrieën onderkennen. Ze leiden tot een 'fysicavrije' aanpak.

De wetten van Kirchhoff zijn opmerkelijk eenvoudig van vorm. Bovendien vinden we in diverse wetenschapsdomeinen wetten met de lineaire vorm van de wetten van Kirchhoff. De stroom- en spanningswet zijn bijvoorbeeld analoog aan de evenwichts- en verenigbaarheidsvoorwaarde uit de mechanica en sterkteleer. Analoge wetten zijn ook in de hydraulica (stromingsleer) en voor transportverschijnselen te ontdekken. In deze domeinen gelden nochtans verschillende fysische wetten. De wetten van Kirchhoff en de analoge wetten blijken een vorm te hebben die onafhankelijk is van het wetenschapsdomein.

De analogieën wijzen op de mogelijkheid om een overkoepelende theorie te ontwikkelen die wetten met de vorm van de wet van Kirchhoff unificeert. Het is de bedoeling van unificatie om 'meer te verklaren met minder'. Dit kan onder andere met behulp van abstractie en generalisering.[6] Het blijkt mogelijk om de wetten van Kirchhoff te veralgemenen en belangrijke takken van de ingenieurswetenschappen te unificeren.

Unificatie door abstractie en generalisering biedt eveneens de mogelijkheid om theorieën tot een geheel te structureren die als onafhankelijk van elkaar bestudeerd worden. Waarschijnlijk kunnen we de veralgemeende netwerktheorieën in meer wetenschappen toepassen dan actueel het geval is. Unificatie laat ook een 'herverkaveling' van het wetenschappelijk landschap toe. Bovendien kunnen we domeinen van de wetenschap axiomatisch herstructureren door de veralgemeende vorm van de wet van Kirchhoff als

---

[5] Deze minder bekende eigenschap is te vinden op blz. 114 in: https://ia802901.us.archive.org/30/items/TELLEGENSTHEOREMANDELECTRICALNETWORKS/TELLEGEN%27S%20THEOREM%20AND%20ELECTRICAL%20NETWORKS.pdf
De vorm van de wetten van Kirchhoff blijft ook behouden voor een lineaire functie van de knoppuntnummers.

[6] Het energiebegrip en energetische methodes maken het ook mogelijk om verschillende theorieën uit de fysica en de ingenieurswetenschappen aan elkaar te koppelen.

basisaxioma te beschouwen.

In deze tekst wordt aangetoond hoe een algemene vorm van de wetten van Kirchhoff uit invarianties en de daarmee overeenstemmende symmetrieën kan afgeleid worden.[7] Het artikel sluit aan bij een vroegere discussietekst die met nieuwe inzichten uitgebreid werd.[8] Het gaat in feite om een veralgemening van de wetten van Kirchhoff voor meetbare grootheden. De wetten van Kirchhoff kunnen op een eenvoudige manier veralgemeend worden uitgaande van invarianties in reeksen van getallen. Opmerkelijk is dat daarbij *geen* beroep gedaan wordt op de wetten van de fysica.

### *3. Meten*

Meten is het toekennen van een reëel getal aan de grootheid die gemeten wordt. We kunnen onder andere een lengte, kracht, tijd, temperatuur, debiet, stroom en spanning meten. Een meting gebeurt ten opzichte van een referentiepunt. Observatoren die verschillende referentiepunten gebruiken om te meten moeten dezelfde maat voor een grootheid kunnen vinden. De meetresultaten dienen dus invariant te zijn voor de keuze van het referentiepunt.

Beschouw bijvoorbeeld drie meetresultaten: $X_{10}$, $X_{20}$ en $X_{21}$. Voor de eerste twee metingen wordt het punt 0 als referentiepunt van de meting gebruikt en voor de derde meting het punt 1. Berekenen het verschil tussen het eerste en tweede meetresultaat en noem het $X'_{21}$ :

$$X'_{21} = X_{20} - X_{10}$$

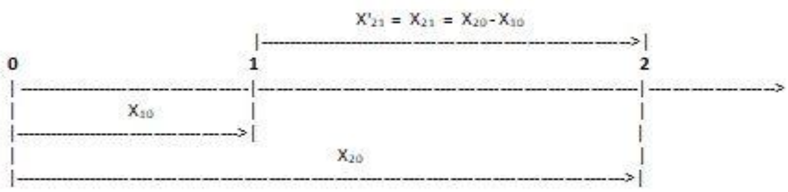
Kiezen we het punt 1 als referentiepunt dan geldt ook:

$$X'_{21} = X_{21} - X_{11}$$

De keuze van referentiepunt mag het verschil $X'_{21}$ immers niet beïnvloeden. Daar $X_{11}$ gelijk is aan nul moet de berekende waarde $X'_{21}$ gelijk zijn aan de gemeten waarde $X_{21}$. Uit de twee vorige vergelijkingen kunnen we dus afleiden dat:

$$X_{21} = X_{20} - X_{10} \quad (4)$$

Dit wordt verduidelijkt met de lengtes in het volgend geometrisch model:




[7] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Invariantie_(natuurkunde), https://nl.wikipedia.org/wiki/Symmetrie_(natuurkunde) https://en.wikipedia.org/wiki/Invariant_(physics) en https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_(physics)

[8] Zie: https://www.vub.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/kirchhoff9.pdf

Wordt het punt 2 als referentiepunt gekozen dan vinden we op een gelijkaardige wijze dat:

$X_{12} = X_{10} - X_{20}$

Rekening houdend met (4) volgt hieruit:

$X_{12} = - X_{21}$

Beschouwen we een ander referentiepunt 0' dan geldt voor de punten 0', 1 en 2 volgens (4):

$X_{21} = X_{20'} - X_{10'}$

We kunnen respectievelijk voor de punten 0, 0' en 2 en de punten 0, 0' en 1 eveneens schrijven dat:

$X_{20'} = X_{20} - X_{00'}$
$X_{10'} = X_{10} - X_{00'}$

Hier kan onmiddellijk uit afgeleid worden dat:

$X_{21} = X_{20'} - X_{10'} = (X_{20} - X_{00'}) - (X_{10} - X_{00'}) = X_{20} - X_{10}$

Het verschil van de meetresultaten $X_{20} - X_{10}$ blijkt dus invariant te zijn voor de keuze van het referentiepunt. De vergelijking (4) kan bijgevolg als een invariant beschouwd worden. Deze invariantie maakt het mogelijk dat verschillende observatoren hetzelfde meetresultaat bekomen.

We nemen in het vervolg van de tekst aan dat de zoals $X'_{21}$ berekende verschillen gelijk zijn aan de overeenstemmende gemeten waarden $X_{21}$ en dat dit voor alle mogelijke referentiepunten het geval is.

***4. Invarianties en symmetrieën voor meetbare grootheden***

Het blijkt mogelijk om de wetten van Kirchhoff en analoge wetten te veralgemenen uitgaande van het meetbegrip. We baseren ons daarbij op de volgende uitgangspunten:

*- meten is het toekennen van een reëel getal aan datgene dat gemeten wordt;*
*- daar meetresultaten reële getallen zijn hebben ze ook de eigenschappen van reële getallen.*

Het is mogelijk om invarianties en symmetrieën voor meetbare grootheden af te leiden uit de eigenschappen van reeksen van reële getallen.

Om de invarianties te vinden beschouwen we een reeks van bijvoorbeeld drie meetresultaten: $X_{10}$, $X_{20}$ en $X_{30}$ . Maak vervolgens paren van de meetresultaten waarbij elk meetresultaat slechts in twee paren voorkomt. Bereken voor elk van deze paren het verschil tussen het eerste en het tweede getal en noem het $X_{12}$ , $X_{23}$ en $X_{31}$ zodanig dat:

$X_{12} = X_{10} - X_{20}$
$X_{23} = X_{20} - X_{30}$
$X_{31} = X_{30} - X_{10}$

Het is duidelijk dat voor som van deze verschillen de volgende identiteit geldt:

$$(X_{10} - X_{20}) + (X_{20} - X_{30}) + (X_{20} - X_{30}) = 0 \quad (5)$$

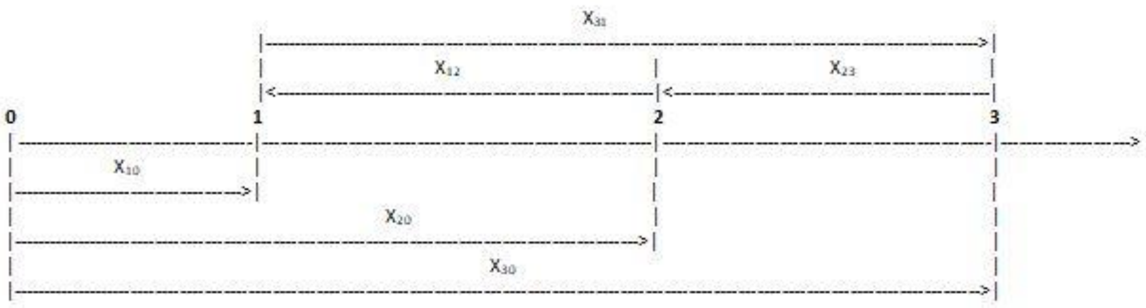
Indien we rekening houden met (4) leidt dit onmiddellijk tot een tweede identiteit:

$$X_{12} + X_{23} + X_{31} = 0 \quad (6)$$

Deze twee identiteiten zijn invarianties.

Bij de meetresultaten vinden we dus invarianten (5) en (6) die analoog zijn aan de spanningswet van Kirchhoff in de vorm (2) en (1). Merk bovendien op dat de meetresultaten $X_{10}$, $X_{20}$ en $X_{30}$ een willekeurige waarde mogen aannemen. De invarianten (5) en (6) kunnen we ook als behoudswetten beschouwen. Ze drukken tevens een vorm van continuïteit uit.

De invarianten (5) en (6) worden verduidelijkt met de lengtes in het volgend geometrisch model:




Uit (6) volgt onmiddellijk zoals in het geometrisch model te zien is dat:

$$X_{12} + X_{23} = - X_{31} = X_{13}$$

Wordt het referentiepunt 0 van de metingen $X_{10}$, $X_{20}$ en $X_{30}$ verschoven dan vinden we een derde invariant. Voor een verplaatsing van het referentiepunt met $X_k$ kunnen we immers uit (5) afleiden dat de volgende identiteit ook geldt:

$$[(X_{10} - X_k) - (X_{20} - X_k)] + [(X_{20} - X_k) - (X_{30} - X_k)] + [(X_{30} - X_k) - (X_{10} - X_k)] = 0 \quad (7)$$

De wijziging van het referentiepunt kan beschouwd worden als een transformatie. De vergelijking (7) wijst op de invariantie voor een translatie. Deze invariantie mogen we ook een symmetrie noemen.

Stellen we in de symmetrie (7) de verschuiving van het referentiepunt $X_k$ gelijk aan 0 dan vinden we de invariant (5) terug. Wordt er daarna met (4) rekening gehouden dan bekomen we de invariant (6).

De invarianties en de symmetrie kunnen dus uit elkaar afgeleid worden. Uit de invariant (5) volgt de invariant (6) die vervolgens tot de symmetrie (7) leidt. De invarianten (5) en (6) kunnen uit de symmetrie (7) afgeleid worden.

De invariantie (7) doet denken aan de stelling van Noether.[9] Uit deze stelling volgt onder andere dat een translatie in de ruimte een wet van behoud van hoeveelheid van beweging oplevert. Volgens de stelling van Noether komt er met iedere differentieerbare symmetrie een behoudswet overeen.

Behoudswetten leggen grootheden vast die invariant zijn. Invarianties voor transformaties van wetten worden ook symmetrieën genoemd. De begrippen invariantie en symmetrie worden dikwijls dooreen gebruikt. Een symmetrie is immers een invariantie voor een bepaalde transformatie.[10] De invarianten (5) en (6) komen overeen met de symmetrie (7).

Merk ook op dat er bij de afleiding van de invarianties en symmetrieën voor meetresultaten alleen van uitgaan werd dat de beschouwde grootheden meetbaar zijn en men ze door getallen kan weergeven. In de bewijzen baseerden we ons feitelijk op de eigenschappen van reeksen van getallen. Voor het in diverse disciplines van de wetenschap toepassen van de invarianties en symmetrie is er geen bijkomende informatie nodig over domeinspecifieke definities en wetten. Dit inzicht leidt tot de basis voor de ontwikkeling van een overkoepelende netwerk, structuur- en systeemtheorie. De symmetrie (7) lijkt daarbij het interessantste uitgangspunt.

Het blijkt dat de linkse term van (6) ook schaalinvariant is. Na de vermenigvuldiging van de meetresultaten $X_{12}$, $X_{23}$ en $X_{31}$ met een constante k geldt immers:

$$k.X_{12} + k.X_{23} + k.X_{31} = k.\ (X_{12} + X_{23} + X_{31}) = 0$$

Het verkleinen van de schaal met een factor k komt overeen met een vermenigvuldiging met k van de meetresultaten. De invariantie voor de keuze van de schaal bij een meting is ook een voorwaarde voor objectieve kennis.

## *5. Afleiding van wetten van Kirchhoff uit invarianties en symmetrieën*

Zoals al opgemerkt werd is de eenvoudige en lineaire vorm van de wetten van Kirchhoff opvallend. Bovendien zijn de stroomwet en spanningswet elkaars duale. De stroomwet van Kirchhoff wordt gewoonlijk verklaard door de wet van behoud van lading en de spanningswet kan met het energiebegrip afgeleid worden uit de definitie van potentiaal. Het is mogelijk om de wetten van Kirchhoff af te leiden zonder een beroep te doen op de fysica.

---

[9] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Noether%27s_theorem en https://nl.wikipedia.org/wiki/Stelling_van_Noether

[10] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_(physics) en https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_in_quantum_mechanics

Om de wetten van Kirchhoff op een algemene wijze af te leiden nemen we aan dat de spanningen en stromen in een elektrisch netwerk meetbaar zijn en dus door reële getallen voorgesteld kunnen worden. Worden de spanningsverschillen tussen de knooppunten van een netwerk in de invariantie (6) ingevoerd dan bekomen we de spanningswet van Kirchhoff in de vorm (1). Het invoeren van de verschillen tussen de spanningen van de knooppunten ten opzichte van het referentiepunt in de invariantie (5) leidt tot de spanningswet van Kirchhoff in de vorm (2). Het is in dit laatste geval ook mogelijk om de spanningen in de knooppunten te vervangen door potentialen. Een spanning wordt immers gedefinieerd als een potentiaalverschil.

Uitgaande van de invariantie (6) kunnen we eveneens de stroomwet van Kirchhoff in de vorm (3) vinden. In dit geval hebben we met takstromen te doen die als een verschil tussen de fictieve maasstromen gedefinieerd worden.

Merk op dat zowel de spanningswet (1) als de stroomwet (3) uit de invariantie voor meetresultaten volgen. Dit verklaart de dualiteit tussen de beide wetten van Kirchhoff. Met dualiteit is het mogelijk om de stroomwet uit de spanningwet af te leiden zonder daarbij maasstromen in te voeren.[11] Dualiteit kan als een symmertie beschouwd worden. Deze symmetrie is zeer belangrijk bij het veralgemenen van de stelling van Tellegen. Paren van duale meetresultaten bieden immers de mogelijkheid om een veralgemeend energiebegrip te definiëren.

In de plaats van de invarianten (5) en (6) hadden we ook de symmetrie (7) als uitgangspunt kunnen nemen om de wetten van Kirchhoff af te leiden. Zoals aangetoond werd kunnen deze symmetrie en invarianten immers ook uit elkaar afgeleid worden.

Merk op dat verschillende observatoren die metingen met een verschillende referentiepunt of schaal uitvoeren dezelfde wetten moeten kunnen afleiden uit hun meetresultaten. Invariantie voor een translatie en schaalinvariantie zijn voorwaarden die objectieve kennis mogelijk maken en eisen die aan de wetten van fysische systemen gesteld worden.[12]

## *6. Bedenkingen en vragen*

Dat het mogelijk is om de wetten van Kirchhoff af te leiden zonder gebruik te maken van de definities en wetten van de fysica roept vragen op. Er werd immers alleen aangenomen dat men spanningsverschillen en stroomverschillen kan definiëren en meten die invariant zijn en dat de wiskundige eigenschappen van reële getallen gelden. Door afstand te nemen van de fysische inhoud bekomen we veralgemeende wetten van Kirchhoff die op netwerken, structuren en systemen in diverse wetenschappen toepasbaar zijn.

Merk ook op dat de wetten van Kirchhoff en hun analoge en veralgemeende vormen identiteiten zijn die gelden voor willekeurige waarden van veranderlijken welke ten opzichte van een willekeurig gekozen referentie bepaald worden. De mogelijkheid om de wetten van Kirchhoff met het invoeren van invarianties en symmetrieën te veralgemenen houdt meer in

[11] ZIe: https://www.vub.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/kirchhoff2.pdf
[12] Schoollinvariantie beperkt de wiskundige vorm die wetten kunnen aannemen. Dit is ook het geval voor dimensionele analyse die uit schaalinvariantie kan afgeleid worden. Meer hierover is te vinden in: https://www.vub.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/vanbelle-schaal.pdf

dan het afleiden van deze wetten uit de wetten van de fysica. Er wordt verder afstand van de fysica genomen. We gaan uit van wat 'de diepere aard van de werkelijkheid' kan genoemd worden.

De invarianten (5) en (6) en de symmetrie (7) blijken 'universeel' geldend te zijn en kunnen als axioma's beschouwd worden voor veralgemeende netwerk- en structuurtheorieën. Ze werden als het ware ontworpen om deze theorieën mogelijk te maken. Bovendien kan men deze wetten uit elkaar afleiden. Ze verklaren elkaar en zijn in die zin zelfverklarend. De wetten van Kirchhoff, de analoge wetten en de veralgemeende wetten lijken wat op een tautologie uit de logica.[13] De analoge en veralgemeende wetten zijn voor zeer uiteenlopende grootheden geldig die we dan als 'interpretaties' van de tautologie kunnen beschouwen.

Wat is de betekenis van dit alles?

Invarianties en symmetrieën zijn in feite eigenschappen van de werkelijkheid die het mogelijk maken om objectieve kennis te verweven en de werkelijkheid te begrijpen. De objecten en verschijnselen die we kunnen waarnemen zijn de bron van wetenschappelijke kennis. Objectieve kennis is echter onmogelijk als observatoren die op verschillende plaatsen gelijktijdig en in dezelfde omstandigheden een experiment uitvoeren niet hetzelfde waarnemen en meten.[14] Als een observator op verschillende tijdstippen een experiment herhaalt dan moet hij ook hetzelfde kunnen waarnemen en meten. Indien dit niet het geval ware zou men over geen algemene relaties kunnen ontdekken die als wetten mogen beschouwd worden en zou de werkelijkheid onbegrijpelijk zijn.[15] Alle objecten en verschijnselen zouden dan immers als anders en uniek ervaren worden.

We kunnen invarianties en symmetrieën dan ook zien als eigenschappen die de 'diepere aard' van de werkelijkheid kenmerken. De invariantie voor een translatie in de ruimte en tijd en de  schaalinvariantie zijn voorwaarden die het verwerven van objectieve kennis mogelijk maken. Zonder dergelijke invarianties ware de werkelijkheid niet begrijpbaar. Dat we deze invarianties in de realiteit kunnen ontdekken en dat het mogelijk is om er wetten uit af te leiden wijst op de intelligibiliteit van de werkelijkheid.

We stellen ook vast dat de wiskunde in veel wetenschappen succesvol toegepast wordt. Vooral in de exacte wetenschappen maakt men gebruik van de wiskunde als een bron van modellen om allerhande problemen op te lossen. Zoals in de Appendix aangetoond wordt kunnen we de wetten van Kirchhoff en de analoge en veralgemeende vormen van deze wetten zelfs direct uit de eigenschappen van reële getallen afleiden.[16] Dit doet denken aan de uitspraak van Wigner over 'de onredelijke effectiviteit van de wiskunde in de natuurwetenschappen'.[17] Het succes van de wiskunde is een eigenschap van de werkelijkheid die zeer mysterieus is.

---

[13] Een tautologie is een uitspraak die waar is voor alle mogelijke interpretaties: https://en.wikipedia.org/wiki/Tautology_(logic)

[14] Er wordt aangenomen dat er geen relativistische verschijnselen spelen.

[15] Wetten zijn in ruimte en tijd terugkerende patronen.

[16] Ook in de stelling van Noether worden er behoudswetten voor fysische systemen alleen uit de wiskundige beschouwingen afgeleid.

[17] Zie: https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/wigner.pdf en https://en.wikipedia.org/wiki/The_Unreasonable_Effectiveness_of_Mathematics_in_the_Natural_Sciences

Invarianties en symmetrieën zeggen meer over de eigenschappen van de werkelijkheid dan de wiskunde. Ze beperken de vorm die wetten kunnen aannemen en men kan er wetten uit afleiden die de werkelijkheid beschrijven. Bovendien laten ze het verwerven van objectieve kennis toe, een voorwaarde voor het begrijpen van de werkelijkheid. Het is opmerkelijk dat we fysische wetten kunnen afleiden uit eerder filosofische beschouwingen over objectieve kennis.

De intelligibiliteit van de werkelijkheid is een groot mysterie. De werkelijkheid blijkt 'onredelijk redelijk'. Deze aanname vormt de basis van de wetenschappen. De fundamentele vraag waarover het uiteindelijk gaat en wat er eigenlijk aan de hand is wordt daarmee echter nog niet beantwoord.

Symmetrieën spelen reeds een belangrijke rol in de kwantummechanica.[18] Hun mogelijkheden voor het afleiden van modellen wordt in andere wetenschapsdomeinen nog onvoldoende onderkend. Dat het om een abstract en generaliserend begrip gaat vormt blijkbaar samen met de vrees voor de wiskundige formulering een hinderpaal. Roger Penrose wijst op de schoonheid van de symmetrieën in de natuur en cultuur om het begrip symmetrie beter toegankelijk te maken.[19]

Het is spijtig dat er in de ingenieurswetenschappen slechts weinig aandacht geschonken wordt aan invarianties en symmetrieën. Ze kunnen de wiskundige modellen uit de systeemtheorie nochtans meer fysische inhoud ('content') geven en dichter bij de werkelijkheid brengen. Met invarianties en symmetrieën is het mogelijk om de vorm van de modellen beter te bepalen.[20]

Hubert Van Belle

20/10/2020

***Appendix: Invarianties en symmetrieën in getallenreeksen***

Beschouw een reeks van willekeurige reële getallen zoals bijvoorbeeld a, b, c, d. Vorm paren van deze getallen waarbij ieder getal slechts in twee paren voorkomt en dit als eerste en als tweede getal. Maak voor elk van deze paren het verschil tussen het eerste en het tweede getal en tel de verschillen op. Voor de getallen a, b, c en d is het dan onmiddellijk duidelijk dat de volgende vergelijking geldt:

$$(a - b) + (b - c) + (c - d) + (d - a) = 0 \quad (A1)$$

[18] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_in_quantum_mechanics
[19] Zie het voorwoord in: https://books.google.be/books?id=Xq1mCgAAQBAJ&newbks=0&printsec=frontcover&dq=fearful+symmetry+roger+penrose&hl=en&redir_esc=y#v=onepage&q=fearful%20symmetry%20roger%20penrose&f=false
[20] Dit is ook het geval voor dimensionele analyse. Voor voorbeelden van het bepalen van de vorm van modellen zie: https://web.stanford.edu/~rpam/dropoff/Phys041N/lecture2_dimanalysis.pdf

Dit is een eerste invariant.[21] De vergelijking (A1) gaat immers op voor alle mogelijke waarden van de veranderlijken. Ze drukt ook een vorm van behoud uit.

Er geldt nog een tweede invariant. In dit geval wijzigen we a, b, c en d in het linkse lid van (A1) met een constante k. Na deze transformatie blijft het rechtse lid gelijk aan nul en bekomen we:

$$[(a + k) - (b + k)] + [(b + k) - (c - k)] + [(c + k) - (d + k)] + [(d + k) - (a + k)] = 0 \quad (A2)$$

De invariant die uit de transformatie volgt kan als een symmetrie beschouwd worden.[22] De vergelijking (A2) blijft immers ook gelding voor alle mogelijke waarden van de constante k.

Stellen we k = - a in (A2) dan vinden we:

$$[(a - a) - (b - a)] + [(b - a) - (c - a)] + [(c - a) - (d - a) ] + [(d - a) - (a - a)] = 0$$

Deze transformatie leidt tot de eerste invariant (A1). De eerste en tweede invariant kunnen dus uit elkaar afgeleid worden.

Merk op dat (A1) en (A2) identiteiten zijn waarin alleen gebruik gemaakt wordt van optellingen en aftrekkingen. Het linkerlid van (A1) en van (A2) is bijgevolg een functie die lineair is voor elk van de veranderlijken.

Voor (A1) geldt na het invoeren van een constante factor k dat:

$$(k.a - k.b) + (k.b - k.c) + (k.c - k.d) + (k.d - k.a) = k. [(a - b) + (b - c) + (c - d) + (d - a)] = 0$$

Het linkerlid van (A1) is dus een functie die schaalinvariant is.[23]

De vergelijking (A1) kan verder veralgemeend worden voor tijds- en frequentieafhankelijke functies en door er lineaire operatoren, Kirchhoff-operatoren genoemd, op toe te passen.[24]

Merk tevens op dat de vorm van de invarianties en symmetrieën voor getallenreeksen ook geldig is voor natuurlijke getallen, complexe getallen, vectoren en matrices.

Het is mogelijk om de wetten van Kirchhoff uit de eigenschappen van reële getallen af te leiden. In de vergelijking (A1) voor drie reële getallen stellen we daartoe bijvoorbeeld:

---

[21] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Invariant_(wiskunde) en https://en.wikipedia.org/wiki/Invariant_(mathematics)

[22] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Symmetrie en https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_in_mathematics

[23] Schaalinvariantie leidt tot machtswetten. Zie: https://www.ellipsix.net/blog/2012/02/scale-invariance-and-the-power-law.html

[24] Zie op blz. 113 en 114 in: https://ia802901.us.archive.org/30/items/TELLEGENSTHEOREMANDELECTRICALNETWORKS/TELLEGEN%27S%20THEOREM%20AND%20ELECTRICAL%20NETWORKS.pdf

$a = U_{10}$
$b = U_{20}$
$c = U_{30}$

Dit leidt onmiddellijk tot de vergelijking (2):

$(U_{10} - U_{20}) + (U_{20} - U_{30}) + (U_{30} - U_{10}) = 0$

De veralgemeende wet van Kirchhoff voor meetresultaten in de vorm (5) kan op een gelijkaardige manier afgeleid worden.