Afleiding van de wetten van Kirchhoff uit symmetrieën (II)

De stelling van Tellegen is een van de belangrijkste stellingen uit de ingenieurswetenschappen. Deze energiestelling is niettegenstaande haar eenvoud zeer algemeen geldig en men kan er heel wat bekende en minder bekende netwerkstellingen uit afleiden.[1] In haar eenvoudigste vorm geeft de stelling van Tellegen het behoud van de energie weer die over de componenten van een elektrisch netwerk verdeeld wordt. De balans van de door de actieve elementen toegevoerde energie en van de in de passieve elementen opgenomen energie moet sluitend zijn.

Bij het bewijs van de stelling van Tellegen vertrekt men van de wetten van Kirchhoff[2] en neemt daarbij het continuteitsprincipe voor stromen aan[3]. Deze wetten en dit beginsel worden uit de fysica afgeleid (het behoud van lading en de definitie van potentiaal). Het blijkt mogelijk te zijn om de wetten van Kirchhoff te bewijzen uitgaande van symmetrieën en invarianten.[4] Dit is ook het geval voor het continuïteitsbeginsel.[5]

Het bewijs van de spanningswet is vrij eenvoudig. Voor de stroomwet werd er echter geen even eenvoudig bewijs gevonden. De stroom- en spanningswet zijn nochtans gelijkaardig van vorm en duaal t.o.v. elkaar.[6] We slaagden er echter niet in om een duaal bewijs af te leiden. Voor de invariantie van een verschil van twee spanningen t.o.v. het referentiepunt dat bij de meting van deze spanningen gebruikt wordt, lijkt immers geen duale invariantie te bestaan.

Een eenvoudiger afleiding van de wetten van Kirchhoff uit symmetrieën blijkt mogelijk indien we potentialen i.p.v. spanningen beschouwen, in het bijzonder geval van planaire netwerken en door dualiteit als symmetrie in te voeren. Beschouw daartoe een elektrisch netwerk bestaande uit in kooppunten verbonden takken. In dit netwerk kunnen we een aantal gesloten lussen of mazen onderscheiden.

1. Afleiding van de spanningswet met potentiaalverschillen.

Een elektrische spanning tussen twee knooppunten wordt gedefinieerd als het potentiaalverschil tussen deze knooppunten. Beschouw drie knooppunten 1, 2 en 3 verbonden door takken die samen een gesloten lus vormen. Als we het potentiaal van deze knooppunten V_1, V_2 en V_3 noemen dan geldt voor de spanning over de takken:

$U_{21} = V_2 - V_1$

$U_{32} = V_3 - V_2$

$U_{13} = V_1 - V_3$

Worden deze vergelijkingen opgeteld dan vinden we onmiddellijk:

$U_{21} + U_{32} + U_{13} = 0$

Deze vergelijking drukt de spanningswet van Kirchhoff uit. De som van de spanningen over een gesloten lus is gelijk aan nul (mits de gepaste tekenconventie).[7]

2. Bewijs van de stroomwet voor planaire netwerken.

In de "mesh current method " voor de analyse van planaire netwerken definieert men stromen in de gesloten lussen.[8] Planaire netwerken kunnen op een blad getekend worden zonder dat de takken elkaar kruisen. In een tak die deel uitmaakt van de lussen i en j vloeien de lusstromen J_i en J_j in tegengestelde zin. Voor een knooppunt waarin drie takken samenkomen kunnen we dan schrijven dat:

$I_{21} = J_2 - J_1$

$I_{32} = J_3 - J_2$

$I_{13} = J_1 - J_3$

Het optellen van deze vergelijkingen leidt tot:

$I_{21} + I_{32} + I_{13} = 0$

Deze vergelijking geeft de stroomwet van Kirchhoff voor een knooppunt met drie takken weer. De som van de stromen in een knooppunt is gelijk aan nul (mits de gepaste tekenconventie).[9]

3. Invoeren van dualiteit als principe.

De spanning en stroom zijn elkaars duale.[6] Dit geldt ook voor de spanningswet en stroomwet van Kirchhoff. Duale wetten zoals de stroom- en spanningswet worden door relaties van dezelfde vorm gekenmerkt. De wetten van Kirchhoff blijven bijgevolg geldig indien de stromen en spanningen omgewisseld worden. De stromen in de knoopunten en de spanningen in de gesloten lussen spelen een rol die als symmetrisch kan bestempeld worden.

Dualiteit is dus een vorm van symmetrie. Buiten de ingenieurswetenschappen en de wiskunde wordt er ten onrechte weinig aandacht aan besteed. Een belangrijke en zeer algemene stelling zoals de stelling van Tellegen is in feite op dualiteit gebaseerd. Het is een intellectuele uitdaging om deze stelling te funderen op symmetrieën en invarianten die uit (wetenschaps-) filosofische beschouwingen volgen.

We zijn er in de vorige twee punten in geslaagd om de wetten van Kirchhoff op een eenvoudige manier af te leiden. Het bewijs van de stroomwet (in punt 2) geldt echter alleen voor het bijzonder geval van planaire netwerken. Het onderkennen van dualiteit als een vorm van symmetrie levert een elegante oplossing op die ook voor niet-planaire netwerken geldig is.

Het aanvaarden van dualiteit lijkt de eenvoudigste manier om de wetten van Kirchhoff uit symmetrieën af te leiden. Om de stroomwet te vinden volstaat het immers om van de duale spanningswet te vertrekken, de spanningen door stromen te vervangen en kooppunten in plaats van gesloten lussen te beschouwen. Na het bewijzen van de spanningswet (zoals o.a. in punt 1) leidt het opleggen van de dualiteitsvoorwaarde dan ook direct tot de stroomwet.

Het is niet onredelijk om dualiteit als een belangrijke karakteristiek van de werkelijkheid te beschouwen en als principe naar voor te schuiven. Dualiteit is immers in de diverse takken van de exacte wetenschappen te ontdekken. O.m. in de elektriciteitsleer en de mechanica vinden we er bekende voorbeelden van.[10] Ook in de wiskunde speelt dualiteit een belangrijke rol.[11]

Telkens hebben met paren van begrippen of variabelen te doen. Worden ze omgewisseld dan blijven bepaalde relaties gelden. In de fysica en ingenieurswetenschappen zijn dergelijke duale paren van veranderlijken terug te vinden in de definities van energie en vermogen. Dit is bijvoorbeeld het geval met spanning en stroom in de elektriciteitsleer en met kracht en verplaatsing in de mechanica.

Dat dualiteit met het energiebegrip te maken heeft blijkt niet toevallig. Behoudswetten zoals de stelling van Tellegen zijn feitelijk op dualiteit gebaseerd. De behoudswetten maken het energiebegrip interessant voor de exacte wetenschappen. Zonder deze invarianties zou het energiebegrip nog weinig betekenis hebben bij de studie van netwerken en systemen.

Ook analogie blijkt een merkwaardig kenmerk van de werkelijkheid te zijn dat interessante toepassingsmogelijkheden biedt.[12] Het energiebegrip, de behoudswetten en de paren van duale veranderlijken maakten het mogelijk om verschillende takken van de exacte wetenschappen aan elkaar koppelen en overeenkomsten te zien. Analogie kan eveneens als een vorm van symmetrie beschouwd worden. In dit geval hebben we te doen met transformaties tussen domeinen van de exacte wetenschappen die de relaties invariant laten.

Noten

1. Zie: *Paul Penfield, Robert Spence and Simon Duinker, Tellegen's Theorem and Electrical Networks, Research Monograph No. 58, The M.I.T Press, Cambridge Massachusetts, 1970*.
Voor het bewijs van de stelling van Tellegen kunnen we ook verwijzen naar:
http://en.wikipedia.org/wiki/Tellegen 's_theorem .
Een beknopte situering van de stelling van Tellegen is te vinden in:
http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/vanbelle-tel.html .

2. Zie: http://nl.wikipedia.org/wiki/Wetten_van_Kirchhoff .

3. Volgens het continuïteitsbeginsel is de stroom die een element van een elektrisch netwerk via een terminal binnenvloeit gelijk aan de stroom die langs de andere terminal het element verlaat. Het continuïteitsbeginsel kan als een bijzonder geval van een veralgemeende vorm van de stroomwet van Kirchhoff beschouwd worden. Deze vorm van de stroomwet geldt niet alleen voor een afzonderlijk knooppunt maar ook voor een deel van een netwerk dat in een blackbox opgenomen wordt. Om toepasbaar te zijn bij de studie van mechanische structuren dient het continuïteitsbeginsel, dat de evenwichtsvoorwaarde voor een element beschrijft, verder veralgemeend te worden. We moeten immers niet alleen topologie maar ook geometrie in rekening brengen.

4. Zie: http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications /kirchhoff.pdf .

5. Zie: http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications /continuiteitsprincipe.pdf .

6. Zie: http://en.wikipedia.org/wiki/Duality_%28electrical_circuits%29 .

7. Merk op dat een analoge vorm van de spanningswet van Kirchhoff bekomen wordt indien we de potentialen vervangen door de nummers van de knooppunten. In het beschouwde geval kunnen we bijvoorbeeld schrijven dat :
$(2 - 1) + (3 - 2) + (1 - 3) = 0$
Dit leidt tot een "exotische" vorm van de stelling van Tellegen.

8. Zie:
http://en.wikipedia.org/wiki/Mesh_analysis ;
http://www-personal.engin.umd.umich.edu/~fmeral/CIRCUITS/02*Unit%202 /2%20Mesh%20Analysis.pdf

9. Zoals een potentiaal is een lusstroom slechts op een factor na bepaald.

10. Zie:
http://en.wikipedia.org/wiki/Duality_%28electrical_circuits%29 ;
http://en.wikipedia.org/wiki/Duality_%28electricity_and_magnetism%29 ;
http://en.wikipedia.org/wiki/Duality_%28mechanical_engineering%29 .

11. Zie bijvoorbeeld:
http://en.wikipedia.org/wiki/Duality_%28mathematics%29 ;
http://en.wikipedia.org/wiki/Duality_%28projective_geometry%29 .

12. Zie: http://en.wikipedia.org/wiki/Analogical_models .

Hubert Van Belle

5/11/2012