Afleiding van de wetten van Kirchhoff uit symmetrieën (III)

De stroom- en spanningswet van Kirchhoff spelen een belangrijke rol bij de analyse van elektrische netwerken. Uit deze wetten kan de stelling van Tellegen afgeleid worden, een zeer algemene energiestelling, die oorspronkelijk voor elektrische netwerken bewezen werd maar ook op analoge systemen toepasbaar is. De stelling van Tellegen werd bovendien voor abstracte energiebegrippen veralgemeend. Het belang en potentieel van de stelling van Tellegen worden nog onvoldoende onderkend. Dit is eveneens het geval voor de wetten van Kirchhoff. Ze vormen nochtans een hoeksteen van de ingenieurswetenschappen.

Het blijkt ook mogelijk om een algemene vorm van de wetten van Kirchhoff af te leiden die in verschillende domeinen van de wetenschappen toegepast kan worden. Daartoe vertrekken we niet van specifieke fysische wetten maar van symmetrieën of invarianten. Deze invarianten leggen voorwaarden vast die het verwerven van objectieve en kwantitatieve kennis toelaten. De op deze wijze veralgemeende wetten van Kirchhoff blijken wiskundige identiteiten te zijn zonder een fysische inhoud. Hieruit volgt een veralgemeende stelling van Tellegen die niet noodzakelijk op de wetten van de fysica gebaseerd is en ook geen fysische inhoud moet hebben. Dit leidt tot vragen over de diepere aard van de werkelijkheid.

1. Symmetrieën die objectieve en kwantitatieve kennis mogelijk maken

Symmetrieën of invarianten spelen een grote rol in de fysica. Sommigen zien het opsporen van symmetrieën als de belangrijkste taak van de fysici. Symmetrieën zijn transformaties die bepaalde eigenschappen van objecten en verschijnselen onveranderd laten.[1] Een bekend voorbeeld is spiegelsymmetrie.[2] De ontdekking van veel subatomaire deeltjes is op symmetriebeschouwingen gebaseerd. De fysica maakt gebruik van een abstract symmetriebegrip dat in de 'moderne' wiskunde ontwikkeld werd. De verschillende transformaties waarvoor een zeker object invariant is vormen samen een symmetriegroep.[3]

In twee vroegere teksten[4] hebben we de stroom- en spanningswet van Kirchhoff[5] uit symmetrieën afgeleid. Deze wetten vormen de basis voor de stelling van Tellegen[6], een zeer algemene energiestelling uit de netwerktheorie, die als de belangrijkste stelling van de ingenieurswetenschappen kan beschouwd worden. Het idee om de wetten van Kirchhoff uit symmetrieën af te leiden volgde uit de te weinig bekende stelling van Noether. Emmy

---

[1] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Symmetrie_%28natuurkunde%29 en https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_%28physics%29

[2] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Spiegelsymmetrie en https://en.wikipedia.org/wiki/Reflection_symmetry

[3] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Symmetriegroep en https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_group

[4] Zie: http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/kirchhoff.pdf en http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/kirchhoff2.pdf

[5] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Elektriciteitswetten_van_Kirchhoff en https://en.wikipedia.org/wiki/Kirchhoff%27s_circuit_laws

[6] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Stelling_van_Tellegen , https://en.wikipedia.org/wiki/Tellegen%27s_theorem en http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.205.5980&rep=rep1&type=pdf

Noether (1882 - 1935) is waarschijnlijk de belangrijkste vrouwelijke wiskundige.

In de stelling van Noether wordt een verband gelegd tussen symmetrieën en behoudswetten.[7] Uit de eis tot invariantie van de wetten van de mechanica voor de plaats van de meting, de oriëntatie van de meettoestellen en het tijdstip van het experiment kon Emmy Noether het behoud van hoeveelheid beweging (voor translatie en rotatie) en het behoud van energie afleiden. Ze is er in feite geslaagd om deze behoudswetten te bewijzen uitgaande van eisen voor objectieve kennis. Een observator dient dezelfde wetten vast te stellen onafhankelijk van onder meer zijn positie en het tijdstip van de observatie. Merk op dat deze kwantitatieve wetten in deze bewijzen uit kwalitatieve overwegingen over de diepere aard[8] van de werkelijkheid volgen. De eigenschappen van de werkelijkheid laten het verwerven van objectieve en kwantitatieve kennis toe.

De kwantitatieve methodes van de wetenschappen en in het bijzonder van de exacte wetenschappen zijn gebaseerd op de mogelijkheid om objecten en verschijnselen te meten. Om objectieve en kwantitatieve kennis over de werkelijkheid mogelijk te maken moeten verschillende waarnemers dezelfde vaststellingen kunnen doen als ze metingen uitvoeren. De meetresultaten mogen bijvoorbeeld niet van plaats en tijd afhankelijk zijn.[9] Bovendien mogen arbitraire keuzes zoals van eenheden en referentie- of nulpunten[10] geen invloed hebben op vorm van de wetten die uit de meetresultaten afgeleid kunnen worden. De wetten moeten dus invariant zijn voor verandering van schaalgrootte, referentiepunt en nulpunt. Dit inzicht leidt tot de afleiding uit symmetrieën van een algemene vorm van de wetten van Kirchhoff die voor meetresultaten geldt. De conclusies die hieruit volgen zijn verrassend.

2. Veralgemeende vormen van de stelling van Tellegen en de wetten van Kirchhoff

De stelling van Tellegen geeft een invariantie weer en drukt het behoud van elektrische energie over de componenten van elektrische netwerken uit. Door integratie in de tijd bekomen we een versie van de stelling van Tellegen die met de bekende wet van behoud van energie, de eerste hoofdwet van de thermodynamica, overeenstemt. Deze op het eerste gezicht evidente stelling is zeer algemeen en kan ook voor abstracte vormen van energie geformuleerd worden.[11]

[7] Zie: http://nl.wikipedia.org/wiki/Stelling_van_Noether ,
http://nl.wikipedia.org/wiki/Stelling_van_Noether#Toepassing ,
https://en.wikipedia.org/wiki/Noether%27s_theorem en
https://en.wikipedia.org/wiki/Noether%27s_theorem#Applications

[8] Datgene wat achter de wetmatigheden verborgen is. De succesvolle toepassing van symmetrieën zoals bijvoorbeeld in de deeltjesfysica roept vragen op.

[9] Dit is alleen algemeen het geval indien de observatoren niet t.o.v. elkaar bewegen en de effecten van de relativiteitstheorie dus niet spelen..

[10] Merk op dat het referentiepunt van een meting niet noodzakelijk een nulpunt is. Het nulpunt van een meetinstrument moet ook niet met een fysisch nulpunt samenvallen.

[11] Zie: Paul Penfield, Robert Spence and Simon Duinker, *Tellegen's Theorem and Electrical Networks,* Research Monograph No. 58, The M.I.T Press, Cambridge Massachusetts, 1970 en
http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/vanbelle-tel.html

De stelling van Tellegen is geldig voor netwerken met actieve en passieve, dissipatieve en conservatieve, lineaire en niet-lineaire en tijdsonafhankelijke en tijdsafhankelijke componenten. Ze geldt eveneens voor fysische systemen zoals bijvoorbeeld mechanische systemen, die analoge eigenschappen[12] hebben als elektrische netwerken.

De stelling van Tellegen blijft van kracht indien er een abstract energiebegrip ingevoerd wordt waarbij men de stromen van een ander tijdstip dan van de spanningen in rekening brengt. Voorbeelden van ongewone energiebegrippen waarvoor de stelling van Tellegen toepasbaar blijft zijn ook de 'content' en 'cocontent' bij niet-lineaire netwerken.[13] Merkwaardig is ook dat de stelling van Tellegen nog geldt indien we de stromen van een gegeven netwerk en de spanningen in een 'toegevoegd netwerk'[14] beschouwen . Deze eigenschap wordt gebruikt om de gevoeligheden voor wijzigingen in netwerken te bepalen. Het is ook mogelijk om een veralgemeende stelling van Tellegen voor systemen en hun toegevoegde systemen, de stelling van Lee genoemd, af te leiden.[15]

Zoals we reeds opmerkten volgt de stelling van Tellegen uit de wetten van Kirchhoff. Niet de eigenschappen van de componenten maar de wetten van Kirchhoff die hun interacties beschrijven bepalen de stelling van Tellegen. De stroom- en spanningswet van Kirchhoff stellen dat de balans sluitend is van respectievelijk de stromen in een knooppunt en de spanningen in een maas[16]. Deze merkwaardig eenvoudige wetten leggen de verbindingsvoorwaarden vast van de componenten die deel uitmaken van een netwerk. De stroom- en spanningswet zijn ontkoppeld van elkaar[17], het gaat om duale wetten[18] en ze hebben een lineaire vorm.

Bij de studie van elektrische netwerken in de ingenieurswetenschappen worden de wetten van Kirchhoff dikwijls als fundamentele wetten beschouwd. De stroomwet kan nochtans fysisch verklaard worden door de wet van behoud van lading en de definitie van elektrische

[12] We beschouwen hier de gelijkvormigheid tussen de wetten die de interactie van de componenten bepalen. De evenwichts- en verenigbaarheidsvoorwaarden die bij mechanische systemen gelden komen overeen met de stroom- en spanningswet van Kichhoff. Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Mobility_analogy , https://en.wikipedia.org/wiki/Impedance_analogy en https://en.wikipedia.org/wiki/Analogical_models

[13] De begrippen 'content' en 'cocontent' worden bij netwerken met niet-lineaire weerstanden gedefinieerd. Ze leiden tot principes die het streven naar een minimum of maximum weergeven (extremaalprincipes) en worden bij variationele methodes toegepast.

[14] Een toegevoegd netwerk heeft gewoonlijk dezelfde vorm als een gegeven netwerk maar de componenten mogen totaal verschillen. De stromen en spanningen moeten echter ook aan de wetten van Kirchhoff voldoen. Het toegevoegd netwerk mag vereenvoudigd worden door bepaalde takken weg te laten zonder dat daarbij het aantal knooppunten vermindert en de samenhang van de graaf verloren gaat. Dit komt erop neer dat we bij het construeren van het toegevoegd netwerk uitgaande van het gegeven netwerk aan een aantal componenten een oneindige weerstand toekennen.

[15] A.Y. Lee, *Signal Flow Graphs. Computer Aided System Analysis and Sensitivity Calculations*. IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-21, No. 2 (March 1974), pp. 209-216. Zie ook: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=C3F8056E5448D582846D6F5A5CBE9AAD?doi=10.1.1.212.5406&rep=rep1&type=pdf p. 1907.

[16] Een maas is een gesloten lus, een kringloop van takken in een netwerk.

[17] In de stroomwet komen alleen takstromen voor en in de spanningswet alleen takspanningen.

[18] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Duality_%28electrical_circuits%29 , https://en.wikipedia.org/wiki/Duality_%28electricity_and_magnetism%29 en http://www.ece.uvic.ca/~bctill/papers/numacoust/LeCorbeiller_Yeung_1952.pdf

stroom. Het gaat om een voorbeeld van de continuïteitsvergelijking.[19] Een fysische verklaring van de spanningswet kan gevonden in de definitie van potentiaal en van spanning. Dat de som van de potentiaalverschillen in een maas gelijk is aan nul is een eigenschap van een conservatief vectorveld en scalair potentiaal.[20] Dit wijst erop dat er in verschillende domeinen wetten gelden die een vorm hebben als de wetten van de wetten van Kirchhoff.

De wetten van Kirchhoff blijven geldig indien er Kirchhoff-operatoren op toegepast worden.[21] Voorbeelden van lineaire Kirchhoff-operatoren zijn differentiatie naar en integratie in de tijd. Er bestaan ook niet-lineaire Kirchhoff-operatoren die tot 'exotische' vormen van de stelling van Tellegen leiden. Dit is bijvoorbeeld het geval indien we de spanningen of stromen vervangen door andere 'parameters' die aan een vorm van de wetten van Kirchhoff voldoen.

In de tweede tekst over de afleiding van de wetten van Kirchhoff uit symmetrieën hebben we reeds opgemerkt dat de stelling van Tellegen ook geldig blijft indien de potentialen in de knooppunten[22] vervangen worden door de nummers van deze knooppunten.[23] De spanning over de takken[24] wordt dan vervangen door het verschil tussen de knooppuntnummers. De stelling van Tellegen blijkt nog steeds te gelden omdat de knooppuntnummers van een netwerk, bijvoorbeeld i, j en k, voldoen aan een vergelijking die de vorm heeft van de spanningwet van Kirchhoff:

$$(j - i) + (i - k) + (k - j) = 0 \qquad (1)$$

Inderdaad, voor de potentialen U_{io} , U_{jo} en U_{ko} van de knooppunten i, j en k in een maas met drie takken van een elektrisch netwerk kunnen we schrijven dat:

$$(U_{jo} - U_{io}) + (U_{io} - U_{ko}) + (U_{ko} - U_{jo}) = 0$$

Door de spanningen over de takken U_{ji} U_{ik} en U_{kj} , in te voeren bekomen we de bekende vorm van de wet van Kirchhoff:

$$U_{ji} + U_{ik} + U_{kj} = 0$$

[19] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Continu%C3%AFteitsvergelijking en https://en.wikipedia.org/wiki/Continuity_equation

[20] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Conservatief_vectorveld , https://en.wikipedia.org/wiki/Conservative_vector_field , https://nl.wikipedia.org/wiki/Potentiaal en https://en.wikipedia.org/wiki/Scalar_potential

[21] Een Kirchhoff-operator laat het lineaire karakter van de wetten van Kirchhoff ongewijzigd. Zie verder: Paul Penfield, Robert Spence and Simon Duinker, *Tellegen's Theorem and Electrical Networks,* Research Monograph No. 58, The M.I.T Press, Cambridge Massachusetts, 1970 , pp. 113 - 114 en http://www.ee.ic.ac.uk/r.spence/pubs/PSD70.pdf pp. 303 - 304

[22] Het kan ook gaan over potentiaalverschillen of spanningen van knooppunten ten opzichte van een referentiepunt.

[23] Zie: http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/kirchhoff2.pdf noot 7.

[24] Een spanning over een tak is het potentiaalverschil tussen de twee knooppunten waarmee deze tak met het overige deel van het netwerk verbonden is.

De vergelijking (1) die voor de knooppuntnummers geldt heeft tevens de vorm van de stroomwet van Kirchhoff waarin de stromen in de mazen van het netwerk beschouwd worden.[25] Ook wanneer we de stromen in de takken door het verschil tussen de nummers van de aanliggende mazen vervangen blijft stelling van Tellegen geldig.

Deze vaststellingen vormden de aanleiding tot dit derde artikel met een aantal nieuwe inzichten die tot opmerkelijke besluiten leiden.

3. Meten van fysische grootheden

Meten is het kwantificeren van grootheden en veronderstelt eenheden en een schaal met een nulpunt. Van een aantal grootheden is de absolute waarde echter niet te bepalen. Er dient ten opzichte van een referentiepunt gemeten te worden en men moet een nulpunt aannemen. Dit is bijvoorbeeld het geval voor een positie in de ruimte en van de tijd. Men kan alleen relatieve waarden opmeten. We meten ook geen elektrische potentialen maar potentiaalverschillen of spanningen tussen twee punten. In feite zijn deze waarden slechts op een constante na bepaald. Deze vaststelling leidt tot onverwachte bevindingen.

Om de redenering te verduidelijken kan gedacht worden aan het meten van de afstanden tussen de punten o, i en j op een rechte met drie identieke meters. Het bewijs kunnen we eveneens illustreren met het voorbeeld van het meten van de tijdsintervallen tussen drie tijdstippen met drie 'stopwatches'. Dit is ook het geval met het meten van drie potentiaalverschillen met drie Voltmeters.

Beschouw de meting van een grootheid X_i ten opzichte van een punt o. Indien er x_{io} eenheden E in X_i gaan kunnen we schrijven dat:

$X_i = x_{io} . E$

De gemeten waarde x_{io} komt overeen met de maat van X_i:

$x_{io} = M_o(X_i)$

---

[25] De maasstromen ('mesh currents') zijn fictieve stromen die bij de studie van planaire netwerken gedefinieerd worden. Planaire netwerken kunnen zonder kruisende takken getekend worden in een vlak, dit in tegenstelling tot niet-planaire netwerken waar het zelfs na een herschikking niet mogelijk is.
Zie: http://en.wikipedia.org/wiki/Mesh_analysis en
https://www.allaboutcircuits.com/textbook/direct-current/chpt-10/mesh-current-method
De mazen die bij planaire netwerken gedefinieerd worden zijn gesloten lussen die zelf geen andere lussen bevatten. Bij niet-planaire netwerken is het echter niet mogelijk om een voldoend aantal van dergelijke 'essentiële' mazen te onderkennen en onafhankelijke vergelijkingen te formuleren om een eenduidige oplossing voor de maasstromen te vinden. Dit sluit het toepassen van de maasanalyse niet uit. Men kan immers wel maasstromen afleiden die niet eenduidig bepaald zijn. Zie: William H. Hayt, Jack E. Kemmerly and Steven M. Durbin, *Engineering Circuit Analysis* (8th ed.), McGraw Hill, New York, 2012,
https://www.amazon.com/Engineering-Circuit-Analysis-Professor-Emeritus/dp/0073529575/ref=dp_ob_image_bk , p. 92.
Een methode die zou toelaten om de maasanalyse zowel op planaire als niet-planaire netwerken toe te passen wordt voorgesteld in: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09747338.2012.10876093#preview

Voor een grootheid X_j geldt ook:

$x_{jo} = M_o(X_j)$

Indien beide maten slechts op een constante c na bepaald zijn mogen we voor iedere c ook aannemen dat we evengoed kunnen stellen dat:

$x_{io} + c = M_o(X_i)$ (2)
$x_{jo} + c = M_o(X_j)$ (3)

Meten we de grootheid X_j ten opzichte van punt i dan wordt:

$x_{ji} = M_i(X_j)$ (4)

Valt j samen met i dan is het niet onlogisch om te stellen dat:

$x_{ii} = M_i(X_i) = 0$ (5)

We nemen ook aan dat er een functie F bestaat:

$M_i(X_j) = F[M_o(X_i) , M_o(X_j)]$

Rekening houdend met (2), (3) en (4) geldt voor alle waarden van c ook dat:

$x_{ji} = F[x_{io} + c , x_{jo} + c]$

Stellen we:

$c = - x_{io}$

dan volgt hieruit dat:

$x_{ji} = F[0 , (x_{jo} - x_{io})]$

De functie F kan dan vervangen worden door een functie f:

$f(x_{jo} - x_{io}) = F[0 , (x_{jo} - x_{io})]$

zodat:

$x_{ji} = f(x_{jo} - xi_o)$

Indien we nu aannemen deze relatie schaalinvariant is, en dus ook voor eenheden geldt die een factor a kleiner zijn, dan wordt:

$a.x_{ji} = f(a.x_{jo} - a.x_{io})$

Deze relatie geldt voor elke x_{io}. Kiezen we $x_{io} = 0$ dan wordt:

$a.x_{ji} = f(a.x_{jo})$

De functie f is dus lineair en van de vorm $f(x) = k.x$.

Dit leidt tot:

$x_{ji} = k.(x_{jo} - x_{io})$ (6)

Laten we punt i samenvallen met o dan vinden we:

$x_{jo} = k.(x_{jo} - x_{oo})$

Daar $x_{oo} = 0$ volgens (5) kunnen we hieruit afleiden dat $k = 1$.

De vergelijking (6) wordt dan vereenvoudigd tot:

$x_{ji} = x_{jo} - x_{io}$ (7)

Het is duidelijk dat de volgende vergelijkingen ook gelden:

$x_{ji} = - x_{ij}$
$x_{ji} = (x_{jo} + c) - (x_{io} + c)$ (8)

Het invoeren van c komt neer op een verplaatsing van het referentiepunt of een verschuiving van het nulpunt.

De invariantie voor c is in feite een voorwaarde die objectieve kennis mogelijk maakt. Met een gelijk meetinstrument kunnen observatoren die verschillende referentiepunten voor hun metingen gebruiken toch hetzelfde resultaat x_{ji} vinden.[26] Om objectieve kennis mogelijk te maken moeten de meetresultaten van de verschillende waarnemers onafhankelijk kunnen zijn van de arbitraire keuzes die ze maken.

Indien de waarnemers niet dezelfde eenheden gebruiken om eenzelfde grootheid te meten zullen hun meetresultaten echter verschillend zijn.

Beschouw de meting van een grootheid X door een waarnemer i met een eenheid E_i en door een waarnemer j met een eenheid E_j. Indien er respectievelijk x_i en x_j eenheden E_i en Ej in X gaan kunnen we schrijven dat:

[26] Dit kunnen ook observatoren zijn die zich in verschillende posities bevinden maar niet bewegen ten opzichte van elkaar.

$X = x_i . E_i = x_j . E_j$

Hieruit volgt voor een eenheid E_j die een factor k groter is dan E_i :

$x_i . E_i = x_j . k. E_i$

zodat:

$x_i = k . x_j$

De meetresultaten zijn dus op een schaalfactor na gelijk. Dit leidt tot de eis van schaalinvariantie voor fysische wetten en verklaart de vorm van een machtswet die ze aannemen.[27]

Volgens de speciale relativiteitstheorie zijn meetresultaten ook niet gelijk indien verschillende observatoren die met een bepaalde snelheid ten opzicht van elkaar bewegen een lengte of een tijdsduur meten.[28] Er bestaat dan wel een relatie die een verband tussen de observaties weergeeft. Meer algemeen kunnen we als voorwaarde voor objectieve kennis stellen dat de verschillende waarnemingen zich volgens een bepaalde functie mogen verhouden ten opzicht van elkaar.[29] In deze tekst beperken we ons echter tot een niet-relativistische visie.

4. Een wet van Kirchhoff voor meetresultaten

Reeds in de eerste tekst over de afleiding van de wetten van Kirchhoff uit symmetrieën hebben we ons op een invariantie gebaseerd voor de afleiding van de spanningswet.[30] We gingen uit van de invariantie van het verschil van twee spanningen t.o.v. het referentiepunt dat bij de meting van deze spanningen gebruikt wordt.

Stellen we nu een gelijkaardige vorm van invariantie voorop en kiezen we i en o als referentiepunt dan kunnen we onmiddellijk voor de meetresultaten x_{io} , x_{jo} en x_{ji} schrijven dat zoals in (7):

$x_{ji} = x_{jo} - x_{io}$ (9)

Kiezen in de plaats van het referentiepunt o een referentiepunt o' dan geldt eveneens:

[27] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Scale_invariance en https://en.wikipedia.org/wiki/Power_law
[28] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Speciale_relativiteitstheorie en https://en.wikipedia.org/wiki/Special_relativity
[29] In een relativistische context hebben we met Lorentzinvariantie te doen. Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Lorentzinvariantie en https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_covariance
[30] Zie: http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/kirchhoff.pdf pp. 4-5.

$x_{ji} = x_{jo'} - x_{io'}$ (10)

De vooropgestelde invariantie leidt ook tot:

$x_{jo'} = x_{jo} - x_{o'o}$
$x_{io'} = x_{io} - x_{o'o}$

Hieruit volgt volgens (10) dat:

$x_{ji} = (x_{jo} - x_{o'o}) - (x_{io} - x_{o'o})$

De constante c in (8) komt dus overeen met - $x_{o'o}$ of $x_{oo'}$.

Beschouw vervolgens drie meetresultaten x_{jo} , x_{jo} en x_{jo} die ten opzichte van een zelfde punt opgemeten worden. Uit de vergelijkingen (7) of (9) kunnen we afleiden dat:

$x_{ji} = x_{jo} - x_{io}$
$x_{ik} = x_{io} - x_{ko}$
$x_{kj} = x_{ko} - x_{jo}$

Worden deze drie vergelijkingen opgeteld dan vinden we dat:

$x_{ji} + x_{ik} + x_{kj} = 0$

Deze vergelijking is analoog aan de spanningswet van Kirchhoff.[31] Voor drie meetresultaten x_{jo}, x_{io} en x_{ko} kunnen we immers schrijven:

$(x_{jo} - x_{io}) + (x_{io} - x_{ko}) + (x_{ko} - x_{jo}) = 0$ (11)

Deze vergelijking geldt steeds voor drie willekeurige meetwaarden.

Dit is een merkwaardige conclusie. Als we een x_{jo} , x_{io} en x_{ko} kunnen meten dan voldoen de meetresultaten aan een relatie met de vorm van de wetten van Kirchhoff. Dit verduidelijkt waarom zoveel analoge vormen van de wetten van Kirchhoff teruggevonden worden in uiteenlopende disciplines.

De vergelijking (11) kan als een veralgemeende vorm van de wetten van Kirchhoff beschouwd worden. Merk bovendien op dat deze vergelijking in feite ook voor drie willekeurige getallen opgaat! Dit is tevens het geval voor complexe getallen en vectoren. Het gaat telkens om een wiskundige identiteiten die eigenlijk geen fysische inhoud hebben. In de

[31] Zoals we reeds opmerkten kunnen we voor de potentialen U_{io} , U_{jo} en U_{ko} van de knooppunten i, j en k in een maas met drie takken van een elektrisch netwerk we schrijven dat:
$(U_{jo} - U_{io}) + (U_{io} - U_{ko}) + (U_{ko} - U_{jo}) = 0$

context van netwerken kunnen we het hebben over eigenschapen van grafen[32] zonder a priori fysische inhoud.

De gevolgde redenering kan gebruikt worden om de wetten van Kirchhoff voor elektrische netwerken af te leiden. De spannings- en stroomwet gelden voor willekeurige waarden van respectievelijk potentialen in de knooppunten en stromen in de mazen van elektrische netwerken. Het bewijs van de stroomwet wordt in Bijlage A gegeven. De spanningswet is de duale van de stroomwet en kan op een gelijkaardige manier bewezen worden. In Bijlage B wijzen we op de analogie tussen de stroomwet van Kirchhoff en de voorwaarde voor een evenwicht van krachten.

Het bewijs van de stelling van Tellegen volgt uit topologische beschouwingen en de wetten van Kirchhoff.[33] Merk op dat men door het toepassen van grafen de topologie belichtte en abstractie maakte van de aard van de componenten.[34] Het bewijs kon ook met matrices in een 'elegante' vorm gebracht worden.

Zoals in Bijlage C aangetoond wordt leidt de veralgemeende vorm van de wetten van Kirchhoff ook tot een veralgemening van de stelling van Tellegen. De redenering die gebruikt wordt voor het afleiden van de stelling van Tellegen voor elektrische netwerken kan daarbij grotendeels gevolgd worden.

Uit de bewijzen in Bijlage A en C volgt dat men om de wetten van Kirchhoff en de stelling van Tellegen af te leiden geen beroep moet doen op de wetten van de fysica. We kunnen dan ook stellen dat het om zuiver wiskundige bewijzen gaat en dat de resultaten niet steeds een fysische interpretatie hebben. Dit is een onverwachte vaststelling die vragen oproept over het wezen van de werkelijkheid. Het is duidelijk dat de diepere aard van de werkelijkheid zo is dat succesvolle toepassingen van de wiskunde mogelijk zijn.[35]

De lineariteit van de wetten van Kirchhoff leidt tot een uitkomst van de stelling van Tellegen die in een orthogonale vorm kan geformuleerd worden. In veel domeinen van de wetenschap kunnen abstracte vormen van loodrechtheid onderkend worden.[36] De veralgemeende vorm van de wetten van Kirchhoff (11) verduidelijkt waarom dit in bepaalde gevallen zo is.

Een minder bekende veralgemeende vorm van de wetten van Kirchhoff wordt in Bijlage D voorgesteld. Bij de studie van mechanische structuren beschouwt men niet alleen het

[32] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Topology_%28electrical_circuits%29#Graph_theory en http://www.cs.ou.edu/~thulasi/Misc2/graph_theory_chp_7.pdf pp. 233 - 236.
[33] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Tellegen%27s_theorem
[34] Zie: en http://nature.berkeley.edu/~goster/pdfs/Tellagen.pdf p. 227.
[35] Max Tegmark gaat zelfs zover om de realiteit (in een welbepaalde zin) als een mathematische structuur te beschouwen. Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_universe_hypothesis
[36] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Orthogonaal en https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonality Orthogonaliteit speelt een grote rol in onder andere de methodes voor de analyse van signalen en de identificatie van systemen.

evenwicht van krachten maar ook van momenten[37]. Zowel de topologie als de geometrie van de structuren moet daarbij in rekening gebracht worden.

5. Besluiten

De diepere aard van de werkelijkheid blijkt zo te zijn dat verschillende observatoren vergelijkbare beschrijvingen kunnen maken om de waarnemingen weer te geven. Het verwerven van objectieve en kwantitatieve kennis is slechts mogelijk indien bepaalde symmetrieën of invarianten gelden. Uitgaande van deze voorwaarden kunnen we een veralgemeende vorm van de wetten van Kirchhoff afleiden.

Zoals aangetoond werd voldoen de verschillen tussen drie of meer willekeurige meetwaarden[38] aan een relatie die de vorm van de wetten van Kirchhoff aanneemt. Indien we in staat om grootheden met metingen te kwantificeren dan voldoen de resultaten aan een veralgemeende vorm van de wetten van Kirchhoff. Dit is een een niet-triviale en verrassende vaststelling.

De wetten van Kirchhoff zijn geen 'gewone' wetten van de fysica. Dit is ook zo voor hun analoge vormen. Ze bevatten alleen variabelen. Bovendien kunnen we ze zo formuleren dat ze altijd geldig zijn. Zoals de vergelijking (11) aantoont gaat het immers om wiskundige identiteiten. Het fysisch aspect van de wetten van Kirchhoff moet dan in het meetproces gezocht worden.

De wetten van Kirchhoff lijken in de vorm (11) op een tautologie[39]. Ze hebben op zich geen fysische inhoud. Dit is dan ook het geval voor de uit de wetten van Kirchhoff afgeleide stelling van Tellegen. De aard van de componenten en de vorm van het netwerk spelen immers geen rol. Dit wijst op mogelijkheden om de stelling van Tellegen in onverwachte disciplines toe te passen. In het geval van netwerken kan het ontbreken van a priori fysische inhoud als een eigenschap van grafen beschouwd worden.

Kunnen we in een bepaald domein van de wetenschappen twee types van veranderlijken opmeten en interacties vinden die overeenkomen met de wetten van Kirchhoff[40] dan is het mogelijk om een relatie met de vorm van de stelling van Tellegen te formuleren. Analoge stellingen zijn dan ook in verschillende domeinen toepasbaar.[41] De stelling van Lee, een

---

[37] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Moment_%28mechanica%29 en https://en.wikipedia.org/wiki/Torque
[38] De uitbreiding naar meer meetwaarden is voor de hand liggend.
[39] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Tautologie_%28logica%29 en https://en.wikipedia.org/wiki/Tautology_%28logic%29
[40] Elk van de veranderlijken moet tot één van twee verschillende verzamelingen behoren. De voorwaarden die tussen de veranderlijken van deze twee verzamelingen gelden dienen zowel onderling ontkoppeld als elkaars duale te zijn. Dikwijls kan men dan ook een analogie met netwerken of netwerkgrafen onderkennen.
[41] Zie: Paul Penfield, Robert Spence and Simon Duinker, *Tellegen's Theorem and Electrical Networks,* Research Monograph No. 58, The M.I.T Press, Cambridge Massachusetts, 1970 , pp. 109 - 112.
Voor elektrische analogen van onder andere de vergelijking van Schrödinger zie: http://westy31.home.xs4all.nl/Electric.html

verder veralgemeende vorm van de stelling van Tellegen, geldt ook voor uiteenlopende systemen, zelfs als ze multidisciplinair zijn.[42]

Een opvallende toepassing van de stelling van Tellegen is de afleiding van de golfvergelijking uit de kwantummechanica[43]. De golfvergelijking blijkt dan ook alleen een wiskundige 'constructie' te zijn die op de mogelijkheid tot het verwerven van objectieve en kwantitatieve kennis gebaseerd kan worden. Deze visie komt overeen met een instrumentalistische interpretatie van de kwantummechanica.[44] Merk nog op dat er elektrische netwerken bekend zijn die een gedrag vertonen dat analoog is aan de vergelijking van Schrödinger.[45] Dit toont aan dat de stelling van Tellegen toepasbaar is op de golfvergelijking maar houdt nog geen afleiding ervan in.

Ook in de mechanica zijn er analoge systemen voor elektrische netwerken te vinden.[46] Dit maakt het mogelijk om de analysemethodes onderling uit te wisselen. Tussen de stelling der virtuele arbeid[47] en de stelling van Tellegen kunnen we ook een analogie onderkenen. De stelling der virtuele arbeid speelt een grote rol bij het berekenen van mechanische structuren.[48] De veralgemening van de stelling van Tellegen kan nog tot nieuwe en onverwachte toepassingen leiden.

De op invarianten gebaseerde veralgemeningen in deze tekst zijn echter op zijn minst merkwaardig te noemen. In feite volgen ze ook uit algemene principes van continuïteit en homogeniteit. Continuïteitsvergelijkingen zijn in verschillende domeinen van de wetenschappen te vinden.[49] Dit is ook het geval voor homogeniteitsvoorwaarden.[50] Zonder enige vorm van continuïteit en homogeniteit zou de werkelijkheid onbegrijpbaar zijn.

Dat we uit invarianten fysische wetmatigheden kunnen afleiden is op zijn minst merkwaardig te noemen. Men kan daarbij de vereisten voor objectieve kennis als uitgangspunt nemen. Dit doet aan een vorm het zwak antropisch principe denken. Volgens dit principe moeten de

---

[42] In dit geval creëert men twee types van veranderlijken door een toegevoegd systeem te beschouwen waarbij de inputs en outputs van het gegeven systeem omgewisseld zijn en de aftakpunten en sommatiepunten omgeruild werden.
[43] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Schr%C3%B6dingervergelijking en https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_function
[44] De discussie over de interpretatie van de kwantummechanica is nog niet afgesloten. Zie https://nl.wikipedia.org/wiki/Interpretatie_van_de_kwantummechanica en https://en.wikipedia.org/wiki/Interpretations_of_quantum_mechanics
[45] Zie: http://nature.berkeley.edu/~goster/pdfs/Tellagen.pdf p. 221 , http://westy31.home.xs4all.nl/Electric.html#Schrodinger en http://www.quantum-chemistry-history.com/Kron_Dat/Kron-1945/Kron-PR-1945/Kron-PR-1945.htm
[46] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Mechanical-electrical_analogies
[47] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Virtual_work en https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method_in_structural_mechanics
[48] Bij de analyse van structuren moet men niet alleen de topologie maar ook de geometrie beschouwen. Daartoe worden er naast krachten ook momenten ingevoerd. De structuurelementen worden in een integraalvorm in rekening gebracht.
[49] ZIe: https://nl.wikipedia.org/wiki/Continu%C3%AFteitsvergelijking en https://en.wikipedia.org/wiki/Continuity_equation
[50] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Homogeniteit_%28natuurkunde%29 en https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneity_%28physics%29

natuurwetten zo zijn dat een intelligente observator mogelijk is.[51] Wordt het antropisch principe uitgebreid dan kunnen we bovendien stellen dat de waarnemers in staat zouden moeten zijn om objectieve kennis over de werkelijkheid uit hun observaties af te leiden. Dat we bij macht blijken te zijn om objectieve kennis te verwerven moet dan ook iets zeggen over de wetten die de werkelijkheid beschrijven, legt beperkingen op aan de vorm die deze wetten kunnen aannemen en laat in sommige gevallen zelfs toe om ze volledig te bepalen.

De werkelijkheid biedt de mogelijkheid tot objectieve kennis, het formuleren van wetmatigheden en het succesvol toepassen van wiskunde. Dit is allesbehalve evident.
We kunnen ook vaststellen dat de energiestellingen die een zeer belangrijke rol spelen in de fysica en ingenieurswetenschappen eigenlijk wiskundige identiteiten zijn, die op zichzelf geen fysische inhoud hebben. Deze vaststellingen leiden tot vragen over de diepere aard van de werkelijkheid.[52]

Het is vreemd dat we in staat zijn om door logisch-wiskundige beschouwingen kennis over de werkelijkheid te verwerven en dit zonder daarbij een beroep te doen op de fysica. De logica en de wiskunde blijken een toegang tot de werkelijkheid te bieden die niet noodzakelijk op een feitelijke fysische basis steunt. De logisch-wiskundige structuur van het universum schijnt een zekere autonomie te hebben.[53] Deze formule structuur openbaart zich overal en wijst op een logos in de werkelijkheid.

Simon Stevin ontdekte een schitterende verklaring voor het evenwicht van voorwerpen op een hellend vlak. Volgens hem is wat wonderlijk schijnt in de natuur geen wonder. Wat niet wonderlijk schijnt, blijkt in feite toch mysterieus te zijn.

Bijlagen:

A. Afleiding van de stroomwet van Kirchhoff

Beschouw een knooppunt met drie takken in een elektrisch netwerk. De stromen in de takken i, j en k zijn respectievelijk I_i, I_j en I_k. We voeren drie fictieve stromen in die elk twee takken doorlopen. Deze maasstromen[54] J_{io}, J_{jo} en J_{ko} worden als volgt gedefinieerd:

$I_i = J_{jo} - J_{io}$ (12)

---

[51] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Antropisch_principe en https://en.wikipedia.org/wiki/Anthropic_principle
Het antropisch principe wordt onder meer in de snaartheorie, M-theorie en kosmologie toegepast. Volgens Stephen Hawking is het antropisch principe onontbeerlijk om een oplossing uit te kiezen uit de verschillende oplossingen die de M-theorie biedt die met het bestaande universum overeenkomt.
Zie: http://www.hawking.org.uk/quantum-cosmology-m-theory-and-the-anthropic-principle.html en http://arxiv.org/pdf/hep-th/0602091v2.pdf

[52] Op vragen over de diepere aard van de werkelijkheid wordt verder ingegaan in hoofdstuk 8 van : http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/integrerend.pdf

[53] De droom van de wiskundigen is een wiskundige wereld die op zichzelf bestaat. Dit doet aan de ideeënleer van Plato denken: https://nl.wikipedia.org/wiki/Idee%C3%ABnleer en https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_realism

[54] De maasstromen worden meestal alleen in planaire (vlakke) netwerken gedefinieerd. Hier gaat het echter alleen om fictieve stromen in denkbeeldige mazen.

$I_j = J_{ko} - J_{jo}$ (13)
$I_k = J_{io} - J_{ko}$ (14)

Worden deze drie vergelijkingen opgeteld dan vinden we:

$(J_{jo} - J_{io}) + (J_{ko} - J_{jo}) + (J_{io} - J_{ko}) = 0$ (15)

Rekening houdend met de definities (12), (13) en (14) leidt de vergelijking (15) onmiddellijk tot de stroomwet van Kirchhoff:

$I_i + I_k + I_j = 0$ (16)

De stroomwet van Kirchhoff is als het ware in de definitie van de maasstromen ingebouwd.

Merk op dat de maasstromen slechts op een constante na bepaald zijn. De vergelijkingen (12), (13) en (14) blijven geldig indien de maasstromen met een constante c wijzigen. Het is bijvoorbeeld voor vergelijking (12) duidelijk dat ze ook opgaat als we c bij J_{io} en J_{jo} optellen:

$I_i = (J_{jo} + c) - (J_{io} + c)$

Dit houdt in dat het stelsel (13), (14) en (15) onbepaald is.[55] We kunnen één van de mogelijke oplossingen vinden door aan één van de maasstromen een willekeurige waarde toe te kennen. Kiezen we hiervoor J_{io} dan volgt uit (13) en (14) dat:

$J_{jo} = I_i + J_{io}$ (17)
$J_{ko} = - I_k + J_{io}$ (18)

Worden de vergelijkingen (12) , (17) en (18) als proef in het linkerlid van de vergelijking (15) ingevoerd dan vinden we:

$I_i + (- I_k - I_i) + I_k = 0$

Deze som is gelijk aan 0 zodat de vergelijking (15) opgaat voor alle J_{io}. We kunnen de maasstromen J_{jo} en J_{ko} dus alleen op de gekozen waarde van J_{io} na bepalen.[56] De maasstromen worden niet direct gemeten maar het is wel mogelijk om ze uit de de stromen door de takken af te leiden.

Zoals de potentialen zijn de fictieve maasstromen slechts op een constante na bepaald. De maasstromen en de potentialen kunnen als de duale van elkaar beschouwd worden.

---

[55] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Stelsel_van_lineaire_vergelijkingen#Algemeen_gedrag en https://en.wikipedia.org/wiki/System_of_linear_equations#General_behavior

[56] Merk op dat het mogelijk wordt om alle maasstromen van een planair lineair netwerk te bepalen indien we het volledige netwerk in rekening brengen. Zie bijvoorbeeld: http://www.dummies.com/how-to/content/circuit-analysis-and-meshcurrent-equations.html

De continuïteitsvergelijking voor een knooppunt volgt onmiddellijk uit de stroomwet van Kirchhoff. Daartoe beschouwen we slechts de takken i en j en stellen $I_k = 0$ in de vergelijking (16). Dit leidt onmiddellijk tot:

$I_i = - I_j$

in Bijlage D wordt een veralgemening van de continuïteitsvergelijking voorgesteld.

B. Het evenwicht van krachten

Volgen de Firestone-analogie komen de stromen in een elektrisch netwerk overeen met krachten in een mechanisch systeem.[57] De stroomwet van Kirchhoff in een knooppunt is dan analoog met de voorwaarde voor het evenwicht van de volgens één richting op een punt uitgeoefende krachten. De krachten die in evenwicht zijn voldoen aan een vergelijking van de vorm (16).

Gaat het om krachtsvectoren dan moeten we ze volgens de x-, y- en z-richtingen in hun componenten ontbinden. Voor elk van deze richtingen kunnen we een aan de stroomwet van Kirchhoff analoge evenwichtsvoorwaarde vinden. Zoals voor de stromen moeten de krachtscomponenten per richting in balans te zijn. Dit geldt ook als we in de plaats van scalaire getallen krachtsvectoren beschouwen[58].

Simon Stevin ontdekte een bewijs voor het evenwicht van een voorwerpen op een hellend vlak en van de krachten die erop inwerken.[59] Hij baseerde zich hierbij op de onmogelijkheid van een perpetuum mobile. De figuur die in dit bewijs gebruikt werd verwerkte hij in zijn beeldmerk samen met de lijfspreuk "Wonder en is gheen wonder".[60]

C. De veralgemeende stelling van Tellegen voor een tak

Beschouwen we een tak met knooppunten i en j en het referentiepunt o. Aan elk van deze knooppunten kunnen twee meetresultaten toegekend worden. Voor het knoopunt i zijn dat x_{jo} en y_{ij} . Volgens de vergelijkingen (7) en (9) geldt voor deze tak:

$x_{ji} = x_{jo} - x_{io}$

Bovendien nemen we aan dat het continuïteitsprincipe[61] voor de tak opgaat:

$y_{ij} = - y_{ji}$

---

[57] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Mobility_analogy
[58] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Vector_%28wiskunde%29#Vectoren_in_de_natuurkunde en https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_%28mathematics_and_physics%29
[59] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Clootcransbewijs
[60] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Simon_Stevin#Natuurkunde en https://en.wikipedia.org/wiki/Simon_Stevin#Geometry.2C_physics_and_trigonometry
[61] Een afleiding van het continuïteitsprincipe uit symmetrieën is te vinden in: http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/continuïteitsprincipe.pdf

Uit deze twee vergelijkingen volgt dat:

$x_{io} . y_{ij} + x_{jo} . y_{ji} = x_{io} . y_{ij} + x_{jo} . y_{ji} = (-x_{io} + x_{jo}) . y_{ji}$

Dit leidt onmiddellijk tot een veralgemeende vorm van de stelling van Tellegen voor een tak:

$x_{io} . y_{ij} + x_{jo} . y_{ji} = x_{ji} . y_{ji}$

Uit de sommatie over alle takken en rekening houdend met een veralgemeende wet van Kirchhoff volgt de veralgemeende vorm van Tellegen voor een volledig netwerk.

D. Een veralgemeende vorm van de wetten van Kirchhoff voor een tak

De veralgemeende vorm van de stelling van Tellegen blijft geldig indien we uitgaan van volgende relaties voor een tak:

$x_{ji} = x_{jo} - k_{ji} . x_{io}$
$y_{ij} = - k_{ji} . y_{ji}$

Inderdaad:

$x_{io} . y_{ij} + x_{jo} . y_{ji} = - k_{ji} . x_{io} . y_{ji} + x_{jo} . y_{ji} = (- k_{ji} . x_{io} + x_{jo}) . y_{ji} = x_{ji} . y_{ji}$

Deze vergelijkingen kunnen ook voor vectoren en in matrixvorm geformuleerd worden. In deze vorm is ze toepasbaar bij de studie van mechanische structuren zoals vakwerkconstructies. Een matrix $|K_{ji}|$ maakt het mogelijk om geometrische eigenschappen in te voeren die voor het berekenen van de momenten van de krachten van belang zijn.[62]

In feite werd het continuïteitsprincipe dat voor de stromen in een tak geldt veralgemeend. Met de veralgemeende wetten van Kirchhoff kunnen we de verbindingsvoorwaarden vastleggen die het evenwicht en de verenigbaarheid of samenhang van de elementen van mechanische structuren bepalen. De hierop gebaseerde veralgemeende stelling van Tellegen komt overeen met de stelling der virtuele arbeid die een grote rol speelt bij de methodes voor het berekenen van structuren zoals bijvoorbeeld de eindige-elementenmethode.[63] Deze methode wordt ook in andere domeinen toegepast.

Hubert Van Belle

Met dank aan prof. em. Joos Vandewalle voor zijn kritische opmerkingen op deze

---

[62] Zie: Hubert Van Belle, *De opbouwmethode en de theorie der toegevoegde strukturen*. Doctoraatsthesis, Departement Werktuigkunde, K.U. Leuven, 1974 en Hubert Van Belle, *Theory of Adjoint Structures*. AIAA Journal 14 (7), 1976, pp. 997-999.
[63] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Eindige-elementenmethode en https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method

discussietekst. Mijn dank gaat ook naar prof. em. Jan Van der Veken voor zijn inbreng i.v.m. de diepere aard van de werkelijkheid.

22/07/2015
16/08/2015 verder uitgewerkt
20/03/2018
13/03/2019