Afleiding van de wetten van Kirchhoff en analoge wetten uit symmetrieën

De wetten van Kirchhoff zijn verbindingswetten die een zeer eenvoudige en opvallende vorm vertonen. Bovendien vindt men buiten de elektrische netwerktheorie ook wetten met een gelijkaardige vorm terug. Dit wijst op de mogelijkheid om een overkoepelende theorie te ontwikkelen en diverse netwerktheorieën te unificeren. Het is vreemd dat daarbij geen beroep moet gedaan worden op de fysica.

In deze tekst wordt een afleiding van de wetten van Kirchhoff en de veralgemening van deze wetten voorgesteld waarbij uitgegaan wordt van invarianten en daarmee overeenkomende symmetrieën. Deze afleiding vormt de basis voor een veralgemeende netwerk-, structuur- en systeemtheorie. Dat daarbij afstand genomen wordt van de fysische verklaringen roept vragen op over de diepere aard van de werkelijkheid.

1. Unificatie van netwerktheorieën

De wetten van Kirchhoff spelen een belangrijke rol in de theorie van de elektrische netwerken. Het gaat om verbindingswetten die samen met de modellen van de componenten het gedrag van het netwerk beschrijven. Een netwerk bestaat uit takken die in knooppunten met elkaar verbonden zijn. In een eenvoudig netwerk beschouwt men componenten met twee aansluitingen als tak. Over een tak staat er een spanning en doorheen de tak vloeit er een stroom. De stroomwet van Kirchhoff legt de relatie vast tussen de stromen in een knooppunt van een netwerk. De spanningswet bepaalt het verband tussen de spanningen over de takken van een maas (gesloten lus) van het netwerk. Het gaat om zeer eenvoudige lineaire wetten. We kunnen de wetten van Kirchhoff beschouwen als beschrijvingen die vormen van continuïteit en van behoud weergeven.

De stromen door en de spanningen over de takken van het netwerk vormen paren van veranderlijken die het mogelijk maken om een energiebegrip in te voeren. De wetten van Kirchhoff vormen de basis van de stelling van Tellegen, een zeer krachtige energiestelling, waaruit veel stellingen van de netwerktheorie kunnen afgeleid worden. Het energiebegrip leidt tot wetten van behoud van energie en biedt mogelijkheden om verschillende wetenschappen aan elkaar te koppelen. Het energiebegrip heeft dus een brugfunctie die een unificatie van wetenschappen toelaat.

De wetten van Kirchhoff zijn opmerkelijk eenvoudig van vorm. Bovendien vinden we in diverse wetenschapsdomeinen wetten met de vorm van de wetten van Kirchhoff. De stroom- en spanningswet zijn bijvoorbeeld analoog aan de evenwichts- en verenigbaarheidsvoorwaarde uit de mechanica en sterkteleer. In deze domeinen gelden verschillende fysische wetten. De wetten van Kirchhoff en de analoge wetten blijken een vorm te hebben die onafhankelijk is van het wetenschapsdomein. Dit wijst op de mogelijkheid om een overkoepelende theorie te ontwikkelen die wetten met de vorm van de wet van Kirchhoff veralgemeent en unificeert. Deze theorie laat een 'herverkaveling' van een deel van het wetenschappelijk landschap toe dat voor ingenieurs belangrijk is.

Het is de bedoeling van unificatie om 'meer te verklaren met minder'. Dit kan niet alleen met het energiebegrip en energetische methodes maar ook met abstractie en generalisatie. Het blijkt mogelijk om de wetten van Kirchhoff en de stelling van Tellegen te veralgemenen en de ingenieurswetenschappen te unificeren. Daartoe worden in de stelling van Tellegen abstracte energiebegrippen ingevoerd.

Unificatie door abstractie en generalisering biedt de mogelijkheid om theorieën tot een geheel te structureren die als onafhankelijk van elkaar bestudeerd worden. Vermoedelijk is het mogelijk om de veralgemeende netwerktheorieën in meer wetenschappen toe te passen dan actueel het geval is. Unificatie laat ook een axiomatische herstructurering van het wetenschappelijk landschap toe.

In deze tekst wordt aangetoond hoe een algemene vorm van de wetten van Kirchhoff uit invaranten en daarmee overeenstemmende symmetrieën kan afgeleid worden. Het gaat in feite om een veralgemening van de wetten van Kirchhoff voor meetbare grootheden. De wetten van Kirchhoff kunnen op een eenvoudige manier veralgemeend worden uitgaande van invarianten in reeksen van reële getallen. Opmerkelijk is dat daarbij geen beroep gedaan wordt op de wetten van de fysica.

Eigenlijk sluit deze discussietekst aan bij mijn doctoraat waarin de veralgemening van de stelling van Tellegen een grote rol speelde.[1] Het gaat ook om de synthese van een aantal vroegere artikels die ik met nieuwe inzichten uitgebreid heb.[2]

2. Invarianten en symmetrieën in getallenreeksen

Beschouw een reeks van willekeurige reële getallen zoals bijvoorbeeld a, b, c, d. Vorm paren van deze reële getallen waarbij ieder reëel getal slechts in twee paren voorkomt en dit als eerste en als tweede reëel getal. Maak voor elk van deze paren het verschil tussen het eerste en het tweede reëel getal en tel de verschillen op. Voor de reële getallen a, b, c en d is het dan onmiddellijk duidelijk dat de volgende vergelijking geldt:

$$(a - b) + (b - c) + (c - d) + (d - a) = 0 \quad (1)$$

Dit is een eerste invariant. De vergelijking (1) gaat immers op voor alle mogelijke waarden van de veranderlijken. Ze drukt ook een vorm van behoud uit.

Er geldt nog een tweede invariant. In dit geval wijzigen we a, b, c en d in het linkse lid van (1) met een constante k. Na deze transformatie blijft het rechtse lid gelijk aan nul en bekomen we:

$$[(a + k) - (b + k)] + [(b + k) - (c - k)] + [(c + k) - (d + k)] + [(d + k) - (a + k)] = 0 \quad (2)$$

[1] Hubert Van Belle, *De opbouwmethode en de theorie der toegevoegde strukturen*. Doctoraatsthesis, Departement Werktuigkunde, K.U.Leuven, 1974 en Hubert Van Belle, *Theory of Adjoint Structures.* AIAA Journal 14 (7), 1976, pp. 997--999.

[2] https://www.vub.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/kirchhoff.pdf , https://www.vub.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/kirchhoff2.pdf , https://www.vub.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/kirchhoff3.pdf , https://www.vub.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/schaalinvariantie.pdf , https://www.vub.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/verbindingswetten.pdf

De invariant die uit de transformatie volgt kan als een symmetrie beschouwd worden. De vergelijking (2) blijft immers ook gelding voor alle mogelijke waarden van de constante k.

Stellen we in de symmetrie (2) de constante k gelijk aan 0 dan vinden we de invariant (1) terug. De eerste en tweede invariant kunnen dus uit elkaar afgeleid worden.

Merk op dat (1) en (2) identiteiten zijn waarin alleen gebruik gemaakt wordt van optellingen en aftrekkingen. Het linkerlid van (1) en van (2) is bijgevolg een functie die lineair is voor elk van de veranderlijken.

Voor (1) geldt na het invoeren van een constante factor k dat:

$$(k.a - k.b) + (k.b - k.c) + (k.c - k.d) + (k.d - k.a) = k. [(a - b) + (b - c) + (c - d) + (d - a)] = 0$$

Het linkerlid van (1) is dus een functie die schaalinvariant is.

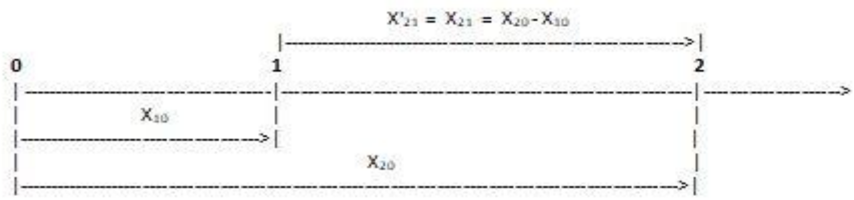
3. Meten

Meten is het toekennen van een reëel getal aan de grootheid die gemeten wordt. We kunnen o.a. een lengte, kracht, tijd, temperatuur, debiet, stroom en spanning meten. Een meting gebeurt t.o.v. een referentiepunt. Om verschillende metingen met elkaar te kunnen vergelijken moet er een invariant bestaan die onafhankelijk is van de keuze van het referentiepunt. Deze eis maakt het mogelijk dat observatoren die verschillende referentiepunten gebruiken om te meten toch dezelfde maat voor een grootheid vinden.

Beschouw bijvoorbeeld drie meetresultaten: X_{10}, X_{20} en X_{21}. Voor de eerste twee metingen wordt het punt 0 als referentiepunt van de meting gebruikt en voor de derde meting het punt 1. Berekenen het verschil tussen het eerste en tweede meetresultaat en noem het X'_{21} :

$$X'_{21} = X_{20} - X_{10}$$

Dit wordt verduidelijkt met de lengtes in het volgend geometrisch model:



Kiezen we het punt 1 als referentiepunt dan geldt ook:

$$X'_{21} = X_{21} - X_{11}$$

Daar X_{11} gelijk is aan nul moet de berekende waarde X'_{21} gelijk zijn aan de gemeten waarde X_{21}.

Deze uitkomst is het gevolg van de eis tot de invariantie van het verschil X_{20} - X_{10} die we vooropstelden. We nemen in het vervolg van de tekst aan dat de zoals X'_{21} berekende verschillen gelijk zijn aan de overeenstemmende gemeten waarden X_{21}.

4. Invarianten en symmetrieën voor meetbare grootheden

Het blijkt mogelijk om de wetten van Kirchhoff en analoge wetten te veralgemenen uitgaande van het meetbegrip. We baseren ons daarbij op de volgende uitgangspunten:

- meten is het toekennen van een reëel getal aan datgene dat gemeten wordt;
- daar meetresultaten reële getallen zijn hebben ze ook de eigenschappen van reële getallen.

Het is mogelijk om invarianten af te leiden uit de eigenschappen van reeksen van reële getallen.

Om een eerste invariant te vinden beschouwen we een reeks van bijvoorbeeld drie meetresultaten: X_{10}, X_{20} en X_{30} . Maak vervolgens paren van de meetresultaten waarbij elk meetresultaat slechts in twee paren voorkomt. Bereken voor elk van deze paren het verschil tussen het eerste en het tweede reëel getal en noem het X_{12} , X_{23} en X_{31} zodanig dat:

$X_{12} = X_{10} - X_{20}$
$X_{23} = X_{20} - X_{30}$
$X_{31} = X_{30} - X_{10}$

Het is duidelijk dat voor som van de verschillen de volgende identiteit geldt:

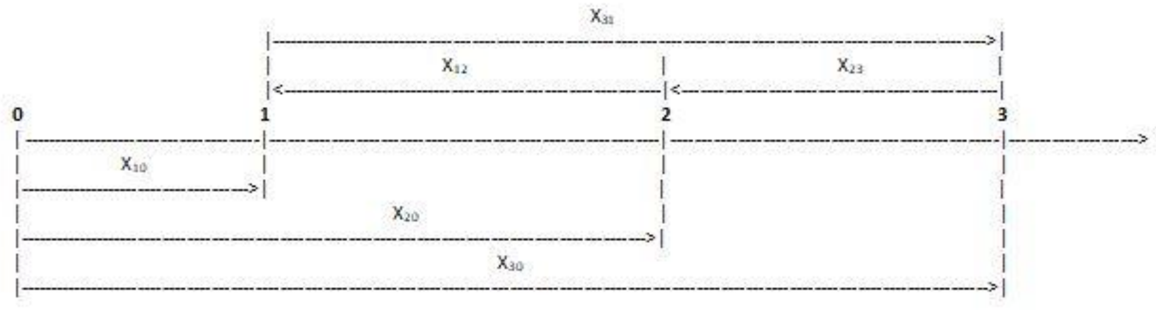
$(X_{10} - X_{20}) + (X_{20} - X_{30}) + (X_{20} - X_{30}) = 0$ (3)

Dit leidt onmiddellijk tot een tweede identiteit:

$X_{12} + X_{23} + X_{31} = 0$ (4)

Deze twee identiteiten zijn invarianten. Merk bovendien op dat de meetresultaten X_{10}, X_{20} en X_{30} een willekeurige waarde mogen aannemen.

De invarianten (3) en (4) worden verduidelijkt met de lengtes in het volgend geometrisch model:



Merk op dat de invarianten (3) en (4) overeenkomen met de invariant (1).

Wordt het referentiepunt 0 van de metingen X_{10}, X_{20} en X_{30} verschoven dan vinden we een derde invariant die analoog is aan (2). Voor een verplaatsing van het referentiepunt met X_k volgt immers onmiddellijk uit (3):

$$[(X_{10} - X_k) - (X_{20} - X_k)] + [(X_{20} - X_k) - (X_{30} - X_k)] + [(X_{30} - X_k) - (X_{10} - X_k)] = 0 \qquad (5)$$

De wijziging van het referentiepunt kan beschouwd worden als een transformatie. De vergelijking (5) wijst op de invariantie voor een translatie. Deze invariantie mogen we ook een symmetrie noemen.

Wordt in de vergelijking in (5) de verschuiving van het referentiepunt X_k gelijk aan nul gesteld dan bekomen we na vereenvoudiging de vergelijking (3) en (4) terug.

De invarianten en de symmetrie kunnen uit elkaar afgeleid worden. De gevolgde structuur van de onderlinge relaties ziet er immers uit als:

```
(3) --> (4) --> (5)
 Î       Î       |
 |       |<------ |
 |<--------------|
```

Stellen we in de symmetrie (5) de verschuiving van het referentiepunt X_k gelijk aan 0 dan wordt de invariant (3) teruggevonden. Dit doet denken aan de stelling van Noether.[3] Volgens deze stelling komt er met iedere differentieerbare symmetrie een behoudswet overeen. Behoudswetten leggen grootheden vast die invariant zijn. Invarianten voor transformaties van wetten worden ook symmetrieën genoemd. De begrippen invariantie en symmetrie worden dikwijls dooreen gebruikt.

Merk ook op dat er bij de afleiding van de invarianten voor meetresultaten alleen van uitgaan werd dat de beschouwde grootheden meetbaar zijn en men ze door reële getallen kan weergeven. In de bewijzen baseerden we ons feitelijk op de eigenschappen van reeksen van reële getallen. Voor het in diverse disciplines van de wetenschap toepassen van de drie invarianten is er geen bijkomende informatie nodig over domeinspecifieke definities en wetten. Dit inzicht leidt tot de basis voor de ontwikkeling van een overkoepelende netwerk, structuur- en systeemtheorie. De symmetrie (5) lijkt daarbij het beste uitgangspunt.

5. Afleiding van wetten van Kirchhoff uit invarianten en symmetrieën

Zoals al opgemerkt werd is de eenvoudige en lineaire vorm van de wetten van Kirchhoff opvallend**.** Bovendien zijn de stroomwet en spanningswet elkaars duale. De stroomwet van Kirchhoff wordt gewoonlijk verklaard door de wet van behoud van lading en de spanningswet kan met het energiebegrip afgeleid worden uit de definitie van potentiaal. Het is mogelijk om de wetten van Kirchhoff af te leiden zonder een beroep te doen op de fysica.

Om de wetten van Kirchhoff te bewijzen nemen we aan dat we spanningen en stromen in

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Noether%27s_theorem en https://nl.wikipedia.org/wiki/Stelling_van_Noether

een elektrisch netwerk meetbaar zijn en dus door reële getallen voorgesteld kunnen worden. De spanningsverschillen tussen de knooppunten van een netwerk leiden dan tot de invariantie (4) die overeenkomt met de spanningswet van Kirchhoff. De verschillen tussen de spanningen van de knooppunten t.o.v. het referentiepunt leiden tot de invariantie (3) die overeenkomt met een andere vorm van de spanningswet van Kirchhoff. Het is in dit laatste geval ook mogelijk om de spanningen in de knooppunten te vervangen door potentialen. Een spanning wordt immers gedefinieerd als een potentiaalverschil.

Voor het afleiden van de stroomwet van Kirchhoff worden de spanningen over de takken vervangen door takstromen en de spanningen of potentialen in de knooppunten door maasstromen.[4] Dit wordt in de volgende tabel verduidelijkt:

```
     Spanningen              Stromen        Invarianten

knooppuntspanningen                             (3)  <--------
   (of -potentialen)                                         |
                                                             |
spanning over de takken                         (4)   <---   |    duale
                                                         |   |
                            takstromen          (4)   <---   |
                                                             |
                            maasstromen          (3)   <------
```

In de plaats van de invarianten (3) en (4) hadden we ook de symmetrie (5) als uitgangspunt kunnen nemen om de wetten van Kirchhoff af te leiden. Zoals aangetoond werd kunnen deze symmetrie en invarianten immers ook uit elkaar afgeleid worden.

Het blijkt dat de rechtse term van (4) ook schaalinvariant is. Na de vermenigvuldiging van X_{12}, X_{23} en X_{31} met een constante k geldt immers:

$$k.X_{12} + k.X_{23} + k.X_{31} = k.\,(X_{12} + X_{23} + X_{31}) = 0$$

Door deze vermenigvuldiging werd de schaal met de factor k verkleind.

Merk op dat verschillende observatoren die metingen met een verschillende referentiepunt of schaal uitvoeren dezelfde wetten moeten kunnen afleiden uit hun meetresultaten. Invariantie voor een translatie en schaalinvariantie zijn voorwaarden die objectieve kennis mogelijk maken en eisen die aan de wetten van fysische systemen gesteld worden.

6. Stelling van Tellegen en Stelling van Lee

Zoals we reeds opmerkten vormen de wetten van Kirchhoff basis van de stelling van Tellegen, een zeer krachtige energiestelling, waaruit veel stellingen van netwerktheorie kunnen afgeleid worden.[5] Dit is bijvoorbeeld het geval voor het behoud van energie over de

---

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Mesh_analysis

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Tellegen%27s_theorem en http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.205.5980&rep=rep1&type=pdf

takken van een netwerk.

Uit de stelling van Tellegen volgt onmiddellijk dat de vectoren van de spanningen en stromen orthogonaal zijn.[6] Othogonaliteit blijkt een indicatie te zijn die wijst op de analoge vorm van de stroom- en spanningswet van Kirchhoff.

De stelling van Tellegen kan veralgemeend worden voor mechanische structuren waarvoor evenwichts- en verenigbaarheidsvoorwaarden gelden. Daartoe is een veralgemening van de stroom- en spanningswet van Kirchhoff vereist. In dit geval moet er immers niet alleen met een de topologie maar ook met de geometrie van de structuren rekening gehouden worden.

Het is ook opvallend dat de stelling van Tellegen geldig blijft als men de stromen in een netwerk beschouwt en de spanningen in een ander netwerk dat dezelfde topologie heeft maar waarvan de componenten verschillend zijn. Dit is ook zo na het invoeren van zogenaamde 'Kirchhoff-operatoren', transformaties die de stelling van Tellegen niet ongeldig maken. Deze veralgemeningen leiden tot abstracte energiebegrippen.

De stelling van Lee is een verdere veralgemening van de stelling van Tellegen voor systemen.[7] De veralgemeende stelling van Tellegen en de stelling van Lee bieden dikwijls nog ongekende mogelijkheden om problemen bij de studie van netwerken, structuren en systemen te benaderen en op te lossen.

Wetten met de vorm van de wetten van Kirchhoff zijn niet alleen in de elektrische netwerktheorie maar ook in andere wetenschapsdomeinen te vinden. Dit houdt in dat de stellingen die uit deze wetten kunnen afgeleid worden ook in de andere domeinen gelden. De stelling van Tellegen is ook in meer domeinen toepasbaar.

Dat we deze veralgemeende stellingen zonder een beroep te doen op de fysica kunnen afleiden en dat ze in verschillende disciplines kunnen toegepast worden wijst op een vorm van 'universaliteit'.

7. Bedenkingen en vragen

Dat het mogelijk is om de wetten van Kirchhoff af te leiden zonder gebruik te maken van de definities en wetten van de fysica roept vragen op. Er werd immers alleen aangenomen dat men spanningsverschillen en stroomverschillen kan definiëren en meten die invariant zijn en dat er wiskundige eigenschappen van reële getallen gelden. Door afstand te nemen van de fysische inhoud bekomen we veralgemeende wetten van Kirchhoff die op netwerken, structuren en systemen in diverse wetenschappen toepasbaar zijn.

De voor meetresultaten veralgemeende wetten van Kirchhoff vormen de basis voor het veralgemenen van de stelling van Tellegen die ook in uiteenlopende wetenschapsdomeinen toepasbaar is. Deze veralgemeende stelling drukt dan het behoud van abstracte vormen van energie uit over de takken van een netwerk.

---

[6] https://ieeexplore.ieee.org/document/1083490
[7] http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=C3F8056E5448D582846D6F5A5CBE9AAD?doi=10.1.1.212.5406&rep=rep1&type=pdf blz. 1907.

Merk ook op dat de wetten van Kirchhoff en hun analoge en veralgemeende vormen identiteiten zijn die gelden voor willekeurige waarden van veranderlijken die t.o.v. een willekeurig gekozen referentie bepaald worden. Ze lijken als het ware ontworpen om dit mogelijk te maken. Bovendien kan men deze wetten uit elkaar afleiden. In die zin zijn ze zelfverklarend.

Wat is de betekenis van dit alles?

De wetten van Kirchhoff en de analoge wetten lijken op een tautologie uit de logica.[8] De invarianten (3) en (4) en de symmetrie (5) blijken 'universeel' geldend te zijn. Het gaat o.i. om meer dan een veralgemening van wiskundige modellen. De afgeleide invarianten en symmetrie zijn ook niet slechts als axioma's te beschouwen voor veralgemeende netwerk- en structuurtheorieën.

We kunnen invarianten en symmetrieën ook zien als eigenschappen die de diepere aard van de werkelijkheid kenmerken. De invariantie voor een translatie en de schaalinvariant maken het verwerven van objectieve kennis mogelijk. Dat deze invarianten in de realiteit ontdekt kunnen worden en dat we er wetten kunnen uit afleiden wijst op de intelligibiliteit van de werkelijkheid.

De begrijpbaarheid van de werkelijkheid is een groot mysterie. Het gaat dieper dan de uitspraak van Wigner over 'de onredelijke effectiviteit van de wiskunde in de natuurwetenschappen'.[9] De werkelijkheid blijkt 'onredelijk redelijk'. Deze aanname vormt de basis van de wetenschappen.

Hubert Van Belle

17/08/2020
27/10/2020

---

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Tautology_(logic)
[9] https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/wigner.pdf en https://en.wikipedia.org/wiki/The_Unreasonable_Effectiveness_of_Mathematics_in_the_Natural_Sciences