Schaalinvariantie en de wetten van Kirchhoff

Het belang van schaalinvariantie

De stroom- en spanningswetten van Kirchhoff spelen een belangrijke rol als verbindingsvoorwaarden in de elektrische netwerktheorie. Deze wetten beschrijven de verdeling van de stromen en spanningen in elektrisch netwerken. Analoge wetten zijn in andere domeinen van de ingenieurswetenschappen zoals de sterkteleer en stromingsleer terug te vinden. Ze kunnen als de basis van zeer algemene energetische stellingen beschouwd worden die voor de studie van lineaire en niet-lineaire elektrische netwerken, mechanische structuren, hydraulische systemen, ... van belang zijn. Voorbeelden hiervan zijn de stelling van Tellegen en de stelling der virtuele arbeid.[1] Opvallend is de eenvoudige en lineaire vorm van de wetten van Kirchhoff, de dualiteit van de van elkaar ontkoppelde stroom- en spanningswetten en de orthogonaliteit tussen de stromen en spanningen in een elektrisch netwerk.

De ingenieurswetenschappen maken veel gebruik van wiskundige modellen. Alles wat wiskundig geldt is daarom nog niet fysisch correct. Om als 'echte' wet beschouwd te worden moet een ontdekte relatie op verschillende plaatsen en tijdstippen van kracht zijn. De wiskundige formulering van wetten dient ook aan de eisen van schaalinvariantie te voldoen zodat ze niet door de keuze van de eenheden bepaald wordt. Iedere observator moet immers in een zelfde wiskundige vorm geformuleerde wetten kunnen opsporen onafhankelijk van het eenhedenstelsel dat hij koos (bijvoorbeeld SI eenheden of 'Imperial units'). Indien dit niet het geval ware zou het uitwisselen van kennis problematisch zijn en kan eigenlijk niet van objectieve kennis gesproken worden. De objectivering van de door observatoren verworven kennis vereist immers de onafhankelijkheid van de arbitraire keuzes die ze bij hun observaties maakten. Deze voorwaarde leidt tot invarianties of symmetrieën zoals schaalinvariantie.[2] Ze kunnen in verband gebracht worden met de intelligiblititeit van de werkelijkheid.[3]

In de netwerk- en systeemtheorie wordt meestal abstractie gemaakt van de eenheden. Nochtans is dimensionele analyse een bekende op schaalinvariantie gebaseerde methode om te verifiëren of een wiskundig model vanuit fysisch oogpunt in orde is. Door rekening te houden met schaalinvariantie kan men de modellen niet alleen 'unit free' maken maar ook een fysische 'content' geven. De voorwaarde van schaalinvariantie en de erop gebaseerde dimensionele analyse maken het ook mogelijk om wetten af te leiden. Een ander mooi voorbeeld van het afleiden van wetten uit beschouwingen over symmetrieën is de stelling van Noether.[4] In deze tekst trachten we de wetten van Kirchhoff af te leiden uit schaalinvariantie. We verwachten dat het gedrag van een elektrisch netwerk bestaande uit een aantal schaalinvariante componenten ook schaalinvariant zal zijn voor een externe observator. Dit blijkt niet zo evident te zijn.

---

[1] Dit zijn analoge stellingen die het behoud van energie over de ruimte gezien uitdrukken.
[2] Voor meer voorbeelden van symmetrie zie: http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/vanbelle-inventaris.pdf
[3] Op de begrijpbaarheid van de werkelijkheid wordt in het naschrift verder ingegaan.
[4] In deze stelling legde Emmy Noether een verband tussen symmetrieën en behoudswetten. Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Noether%27s_theorem

De wetten van Kirchhoff

De wetten van Kirchhoff leggen de verbindingsvoorwaarden in een elektrisch netwerk vast. Ze beschrijven de verdeling van spanningen en stromen over de elementen waaruit het netwerk bestaat.

Volgens de stroomwet is de balans sluitend van de stromen die naar een knooppunt vloeien. Voor een knooppunt waarin n takken samenkomen geldt een continuïteitsprincipe:

$I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = 0$

Deze wet kan afgeleid worden uit de wet van behoud van lading.

De spanningswet stelt dat de som van spanningen over de m takken van een maas (gesloten lus) in een netwerk gelijk is aan nul:

$U_{21} + U_{32} + U_{43} + ... + U_{1m} = 0$

Deze wet volgt uit de definitie van spanning als potentiaalverschil in een conservatief elektrisch veld.

Beschouw het voorbeeld van een eenvoudig netwerk met twee in parallel geschakelde componenten waarop een bron aangesloten is. De bron met spanning U stuurt een stroom I naar het netwerk. Volgens de stroomwet van Kirchhoff wordt de stoom verdeeld over de twee componenten en kunnen we schrijven (met een gepaste tekenconventie[5]) dat:

$I = I_1 + I_2$

Voor een parallelschakeling geldt bovendien:

$U = U_1 = U_2$

Hieruit volgt onmiddellijk:

$U.I = U_1.I_1 + U_2.I_2$

Deze vergelijking drukt het behoud van energie over de takken van het netwerk uit en kan ook uit de stelling van Tellegen afgeleid worden [6]. Op energiestellingen gebaseerde methodes spelen een grote rol in de ingenieurswetenschappen.[7]

De orthogonaliteit tussen de vectoren van spanningen en stromen wordt duidelijk indien de vorige vergelijking als volgt geschreven wordt:

---

[5] De stoom die de bron verlaat en de stromen die de componenten binnenvloeien worden dan als positief beschouwd. In het omgekeerde geval beschouwt men ze als negatief.

[6] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Stelling_van_Tellegen
https://en.wikipedia.org/wiki/Tellegen%27s_theorem en
http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/vanbelle-tel.html

[7] Dit is bijvoorbeeld het geval in de eindige elementen methode ('finite element method') voor het berekenen van mechanische structuren.

$U.I + U_1.(-I_1) + U_2.(-I_2) = 0$

De verbindingsvoorwaarden voor een door een bron gevoede serieschakeling van twee componenten worden volgens de stroomwet en spanningswet respectievelijk gegeven door:

$I = I_1 = I_2$
$U = U_1 + U_2$

Het behoud van energie en de orthogonaliteit tussen spanningen en stromen blijven geldig:

$U.I = U_1.I_1 + U_2.I_2$
$U.I + (-U_1).I_1 + (-U_2).I_2 = 0$

Merk op dat de stromen en spanningen van een parallelschakeling en serieschakeling elkaars duale zijn. Als de stromen en spanningen omgewisseld worden blijven de vergelijkingen geldig.[8]

Schaalinvariantie

Een symmetrie of invariantie van een functie is een bepaalde transformatie die deze functie niet verandert en waarvoor de functie dus invariant is.[9] Schaalinvariantie is belangrijk voorbeeld van symmetrie.[10] Het symmetriebegrip is buiten de fysica nog te weinig bekend.

Symmetrieën kunnen als kenmerken van de diepere aard van de werkelijkheid beschouwd worden. In de stelling van Noether wordt aangetoond dat bepaalde symmetrieën overeenstemmen met behoudswetten.[11] Dit wijst op een mogelijkheid om de wetten van Kirchhoff uit schaalinvariantie af te leiden.[12]

Een functie $y = f(x)$ is schaalinvariant indien ze met een functie $g(\lambda)$ verschaald wordt als we de variabele x met een willekeurige factor λ verschalen:

$f(\lambda.x) = g(\lambda).f(x)$

Deze functionele vergelijking leidt tot een machtswet met een constante C en graad n:

$y = C.x^n$

Inderdaad:

$f(\lambda.x) = C.(\lambda.x)^n = C.\lambda^n.x^n = \lambda^n.f(x)$

waarin $\lambda^n = g(\lambda)$

[8] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Duality_(electrical_circuits)
[9] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry en https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_in_mathematics
[10] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Scale_invariance
[11] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Noether%27s_theorem
[12] Zowel de stroomwet als spanningswet kunnen als behoudswetten beschouwd worden. De balans van de stomen in een knooppunt en de spanningen in een maas van een elektrisch netwerk is immers sluitend. Dit doet ook aan het continuïteitsprincipe denken.

Een machtswet blijkt de enige oplossing te zijn.[13]

Merk op dat machtswetten op verschillende niveaus van de werkelijkheid en in verschillende wetenschappen opduiken.[14] Men heeft het soms over 'universality'.[15]

Ook een functie van de vorm $y = F(x_1, x_2, x_3, ...)$ kan schaalinvariant zijn.

Daartoe is echter vereist dat de functie homogeen is zodat we voor alle waarden van λ mogen schrijven dat [16]:

$F(\lambda.x_1, \lambda.x_2, \lambda.x_3, ...) = \lambda^m. F(x_1, x_2, x_3, ...)$

Een homogene veelterm is een voorbeeld van een homogene functie.

De termen van een homogene veelterm zijn van dezelfde graad.[17]

Dit geldt bijvoorbeeld voor de homogene veelterm:

$y = (x_1. x_2. x_3) + (x_1^2. x_2) + x_3^3$

Als voor een homogene veelterm geldt dat:

$F(x_1, x_2, x_3, ...) = 0$

dan is ook:

$F(\lambda.x_1, \lambda.x_2, \lambda.x_3, ...) = 0$

Een niet-homogene veelterm kan door het invoeren van een bijkomende veranderlijke gehomogeniseerd worden.[18]

De niet-homogene veelterm $F(x_1, x_2, x_3, ...)$ wordt dan omgevormd tot de homogene veelterm:

${}^hF(x_0, x_1, x_2, x_3, ...) = x_0^q. F(x_1/x_0, x_2/x_0, x_3/x_0, ...)$

waarin x_0 de bijkomende veranderlijke voorstelt en q de graad van de veelterm.

---

[13] Zie: http://www.ellipsix.net/blog/2012/02/scale-invariance-and-the-power-law.html

[14] Zie: http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/vanbelle-schaal.pdf

[15] Het begrip 'universality' of 'universaliteit' kan als volgt verduidelijkt worden: *In physics, mathematics, statistics, and economics, scale invariance is a feature of objects or laws that do not change if scales of length, energy, or other variables, are multiplied by a common factor, thus represent a universality*. Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Scale_invariance

[16] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Homogeniteit_(wiskunde) en https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_function

[17] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Homogene_veelterm en https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_polynomial

[18] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_polynomial#Homogenization

De niet-homogene veelterm met graad 3:

$(x_1 . x_2 . x_3) + (x_1 . x_2) + 5$

wordt na homogenisering:

$x_0^3 [(x_1/x_0 . x_2/x_0 . x_3/x_0) + (x_1/x_0 . x_2/x_0) + 5] = (x_1 . x_2 . x_3) + (x_0 . x_1 . x_2) + 5 x_0^3$

Een gehomogeniseerde veelterm kan 'gedehomogeniseerd' worden door de bijkomende veranderlijke x_0 gelijk aan 1 te stellen:

$F(x_1, x_2, x_3, ...) = {}^hF(1, x_1, x_2, x_3, ...)$

Het is voor de stroomwet en spanningswet duidelijk dat voor alle waarden van de factor λ respectievelijk geldt dat:

$\lambda.I_1 + \lambda.I_2 + \lambda.I_3 + ... + \lambda.I_n = 0$
$\lambda.U_{21} + \lambda.U_{32} + \lambda.U_{43} + ... + \lambda.U_{1m} = 0$

De verbindingsvoorwaarden van een elektrisch netwerk kunnen dus door homogene veeltermen beschreven worden en zijn schaalinvariant.

Afleiding van de wetten van Kirchhoff uit schaalinvariantie (1)

Beschouw een eenvoudig elektrisch netwerk bestaande uit twee componenten die door een bron gevoed worden. Deze componenten kunnen in parallel of serie geschakeld zijn.

De spanningen over de takken van dit netwerk zijn een functie van de stromen die door deze takken vloeien:

$U_1 = f_1(I_1)$ (1)
$U_2 = f_2(I_2)$ (2)
$U = f(I)$ (3)

We nemen aan dat dit netwerk beschreven kan worden door de vergelijking:

$G(U_1, I_1, U_2, I_2, U, I) = 0$

Dit leidt rekening houdend met (1), (2) en (3) tot:

$G[f_1(I_1), I_1, f_2(I_2), I_2 , f(I), I] = 0$

Deze vergelijking kan herleid worden tot:

$H(I_1, I_2 ,I) = 0$

Hieruit kunnen we afleiden dat :

$I = F(I_1, I_2)$ (4)

Bovendien nemen aan dat de componenten een schaalinvariant gedrag vertonen en dus door een machtswet gemodelleerd kunnen worden :

$I_1 = C_1.U_1^n$ (5)
$I_2 = C_2.U_2^m$ (6)

Het is ook niet onredelijk om te stellen dat dit netwerk vanuit de bron gezien zich ook schaalinvariant gedraagt en het gedrag van de bron dan beschreven wordt door :

$I = C.U^p$ (7)

De vergelijking (4) kan rekening houdend met de machtswetten (5), (6) en (7) omgevormd worden tot:

$C.U^p = F(C_1.U_1^n, C_2.U_2^m)$ (8)

Als het linkerlid schaalinvariant is moet ook het rechterlid dit zijn.

Deze voorwaarde wordt voldaan indien het rechterlid van de vergelijking een homogene functie is.[19] Een homogene functie is immers ook schaalinvariant.

Een veelterm van de vorm $C_1.U_1^n + C_2.U_2^m$ is een eenvoudige functie die onder bepaalde voorwaarden aan de eis van homogeniteit kan voldoen.

Als deze veelterm in de vergelijking (8) ingevoerd wordt vinden we:

$C.U^p = C_1.U_1^n + C_2.U_2^m$ (9)

Om schaalinvariant te zijn moet deze vergelijking voor alle waarden van de factor λ voldoen aan:

$C.(\lambda.U)^p = C_1.(\lambda.U_1)^n + C_2.(\lambda.U_2)^m$

Het is duidelijk dat het rechterlid van de vergelijking (9) slechts een homogene veelterm is als:

$n = m$

Het gaat dan om twee componenten van hetzelfde type maar eventueel een andere waarde van de constante C_1 en C_2.

De homogene veelterm van het rechterlid en de machtswet in het linkerlid kunnen slechts met elkaar overeenkomen indien:

$p = n = m$ (10)

Uit de vergelijking (9) volgt dan dat:

[19] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Homogeniteit_(wiskunde)

$C.U^p = C_1.U_1^p + C_2.U_2^p$ (11)

In het geval van een parallelschakeling worden de twee componenten door de bron op dezelfde spanning U aangesloten zodat de volgende voorwaarde opgelegd wordt:

$U = U_1 = U_2$ (12)

Bovendien geldt in dit geval volgens (11) dat:

$C.U^p = C_1.U^p + C_2.U^p$ (13)

Onder de voorwaarden (10) en (12) worden de vergelijkingen (5) en (6):

$I_1 = C_1.U^p$
$I_2 = C_2.U^p$

Bovendien geldt de vergelijking (7):

$I = C.U^p$

Rekening houdend met deze machtswetten volgt uit (13) dat:

$I = I_1 + I_2$ (14)

De twee componenten en de bron zijn in twee knooppunten met elkaar verbonden. Voor deze knooppunten geldt volgens (14):

$I + (-I_1) + (-I_2) = 0$

en:

$(-I) + I_1 + I_2 = 0$

Mits een aangepaste tekenconventie voor de stromen leiden deze vergelijkingen onmiddellijk tot de stroomwet van Kirchhoff voor een knooppunt met drie takken:

$I_1 + I_2 + I_3 = 0$

Merk op dat de gevolgde bewijsvoering alleen geldt indien de componenten en de bron lineair zijn of een gelijkaardig type van niet-lineair gedrag vertonen.

Afleiding van de wetten van Kirchhoff uit schaalinvariantie (2)

Zoals aangetoond werd kan het gedrag van een elektrisch netwerk met twee componenten en een bron die zich schaalinvariant gedragen beschreven worden door de vergelijking (9):

$C.U^p = C_1.U_1^n + C_2.U_2^m$

Deze vergelijking komt overeen met de veelterm:

$C.U^p - C_1.U_1^n - C_2.U_2^m = 0$

die slechts homogeen in het bijzonder geval dat de termen van dezelfde graad zijn en $p = n = m$.

De vorige aannames van schaalinvariantie en homogeniteit leiden dus niet tot een algemene afleiding van de stroomwet van Kirchhoff uit schaalinvariantie.

Een algemene oplossing voor het probleem is te vinden door de eis van homogeniteit niet op te leggen aan:

$C.U^p - C_1.U_1^n - C_2.U_2^m = 0$

maar aan de gehomogeniseerde vorm van deze veelterm:

$C.\ U_0^{q-p}.\ U^p - C_1.\ U_0^{q-n}.U_1^n - C_2.\ U_0^{q-m}\ .U_2^m = 0$

met U_0 als bijkomende veranderlijke en q als de graad van deze veelterm.

De gehomogeniseerde veelterm kan als een veralgemening van de overeenstemmende niet-homogene veelterm beschouwd worden. Door de bijkomende veranderlijke U_0 gelijk aan 1 te stellen vinden we immers de oorspronkelijke veelterm terug.

Voor een parallelschakeling is:

$U = U_1 = U_2$

waaruit volgt dat:

$C.\ U_0^{q-p}.\ U^p - C_1.U_0^{q-n}.U^n - C_2.\ U_0^{q-m}\ .U^m = 0$

Deze vergelijking kan rekening houdend met de machtswetten voor de bron en de componenten:

$I = C.U^p$
$I_1 = C_1.U^p$
$I_2 = C_2.U^p$

herleid worden tot:

$U_0^{q-p}.\ I - U_0^{q-n}.I_1 - U_0^{q-m}\ .I_2 = 0$

Stellen we de bijkomende veranderlijke:

$U_0 = 1$

dan bekomen we de stroomwet van Kirchhoff:

$I = I_1 + I_2$

Op een gelijkaardige manier kunnen we de spanningswet van Kirchhoff afleiden voor een serieschakeling.

Deze redering kan gemakkelijk uitgebreid worden voor elektrische netwerken met meer dan twee in parallel of serie geschakelde componenten. Door een netwerk te beschouwen als een combinatie van parallel- en serieschakelingen en het als het ware stap voor stap op te bouwen kan men de wetten van Kirchhoff nog meer algemeen afleiden.

Merk op dat schaalinvariantie en homogeniteit ook uitgangspunten zijn van dimensionele analyse[20]. De voorwaarde van homogeniteit die we aannamen is echter minder streng. In dimensionele analyse wordt een eis van dimensionele homogeniteit gesteld die de homogeniteit van de wiskundige modellen voor elk van de fundamentele eenheden oplegt.[21]

De gebruikte methode van homogeniseren vertoont ook een overeenkomst met 'nondimensionalization', het dimensieloos maken van dimensionele vergelijkingen.[22] De bijkomende veranderlijke doet ook aan een verborgen veranderlijke ('hidden variable') denken.

Naschrift

Mijn verwondering over de eenvoudige en lineaire vorm van de wetten van Kirchhoff, de dualiteit van de van elkaar ontkoppelde stroom- en spanningswetten en de orthogonaliteit tussen de stromen en spanningen in een elektrisch netwerk was het uitgangspunt voor het schrijven van deze tekst. De wetten van Kirchhoff en andere analoge verbindingswetten vormen de basis van de krachtige energetische methodes uit de ingenieurswetenschappen die zowel voor lineaire als niet-lineaire systemen gelden.

Ik ben op zoek naar een zo algemeen mogelijke afleiding van de wetten van Kirchhoff uitgaande van symmetrieën of invarianties die niet op fysische principes maar op eerder filosofische beschouwingen gebaseerd zijn. Het is immers blijkbaar mogelijk om natuurwetten af te leiden uit fundamentele, kwalitatieve beginselen. Ik tracht daarbij uit te gaan van voorwaarden die het voor verschillende observatoren mogelijk maken om objectieve kennis te verwerven. Deze zoektocht leidde tot diverse benaderingen.[23]

De diepere aard van de werkelijkheid roept heel wat vragen op. Denk bijvoorbeeld aan de herhaling van dingen en verschijnselen in ruimte en tijd, het bestaan van wetmatigheden, de 'onredelijke

[20] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Dimensional_analysis en https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/m280_09/ch2.pdf (p. 12)

[21] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Dimensional_analysis#Dimensional_homogeneity
De zogenaamde 'empirische wetten' zijn niet dimensioneel homogeen en dus afhankelijk van de gekozen eenheden.

[22] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Nondimensionalization en Thomas A. McMahon en John Tyler Bonner, *De maat van het leven. Hoe de natuur haar eigen wetten gehoorzaamt,* Natuur en Techniek, Maastricht, 1987, p. 107.

[23] Zie: http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/kirchhoff.pdf , http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/kirchhoff2.pdf en http://www.vub.ac.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews/publications/kirchhoff3.pdf

effectiviteit van de wiskunde' [24], het succes van de reductionistische methodes, het belang van symmetrieën, de mogelijkheid om wetten uit symmetrieën af te leiden, de overal opduikende machtswetten, de eenvoudige vorm van de verbindingsvoorwaarden, de zeer algemene energetische methodes en de analogie tussen verschillende wetenschappen.

Symmetrieën doen aan de eeuwige vormen van Plato denken. Ze spelen een grote rol in de kwantummechanica en deeltjesfysica. Sommige fysici beschouwen de fysica zelfs als een speurtocht naar symmetrieën. In de ingenieurswetenschappen wordt het belang van symmetrieën, schaalinvariantie en machtswetten nog onvoldoende onderkend. Ze bieden nochtans toepassingsmogelijkheden in het moeilijk toegankelijk domein van de niet-lineaire systemen.

Wetten en symmetrieën laten in feite toe om de verworven kennis te comprimeren. Het is ook opmerkelijk dat het mogelijk blijkt om wetten af te leiden uit symmetrieën die volgen uit de eis dat kennis moet kunnen geobjectiveerd worden. De complexe en diverse realiteit blijkt zo te zijn dat objectieve kennis mogelijk is en de werkelijkheid voor een deel door de mens begrepen kan worden. Deze intelligibiliteit blijkt een merkwaardige karakteristiek van de diepere aard van de werkelijkheid te zijn en is een groot mysterie. Het is alsof de mens als observator centraal staat in het 'universum' van wetenschappelijke kennis. Op de uiteindelijke vragen over de werkelijkheid is de binnen de wetenschap geen antwoord te vinden. Ze worden naar de 'last desk' van filosofie en theologie verwezen.

Hubert Van Belle

2/05/2017
19/03/2018

---

[24] Naar het boek van Eugene Wigner: *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*. Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/The_Unreasonable_Effectiveness_of_Mathematics_in_the_Natural_Sciences