SCHAALINVARIANTIE EN MACHTSWETTEN

Hubert Van Belle

Leo Apostel was zeer gefascineerd door symmetrieën en symmetriebrekingen (asymmetrieën). Hij beschouwde ze als fundamentele karakteristieken van de werkelijkheid en finale verklaring. Volgens hem kon men symmetrieën en symmetriebrekingen in elk van de lagen van de werkelijkheid terugvinden. Deze 'universele eigenschap' zou het mogelijk maken om de kloof tussen de exacte en de menswetenschappen te overbruggen. Hij wees er ook op dat de natuurwetten invariant zijn voor plaats en tijd. Zonder deze merkwaardige karakteristiek van de werkelijkheid zou inductieve generalisatie onmogelijk zijn. Dit is ook het geval voor objectieve kennis.

Symmetrieën van bepaalde entiteiten (structuren, fenomenen, processen, wetten) zijn transformaties die deze entiteiten in zekere opzichten (voor bepaalde aspecten) onveranderd (invariant) laten. Het belang van transformaties en symmetrieën in de meetkunde werd voor het eerst ingezien door Felix Klein (het Erlanger program). Hij stelde dat meetkundige eigenschappen gekarakteriseerd kunnen worden door het feit dat ze binnen een transformatiegroep onveranderd blijven. Meetkunde kan dus als groepentheorie benaderd worden. De groepentheorie levert een kader om de verschillende meetkundes met elkaar in verband te brengen en te integreren.

Emmy Noether onderkende het belang van symmetrieën en invarianten in de mechanica. Zij bewees dat er voor iedere continue symmetrie in de wetten van de fysica (in het bijzonder de Lagrange vergelijking) er een behoudswet (een kwantiteit die behouden blijft in het dynamisch proces) moet bestaan. Het omgekeerde geldt ook: voor iedere behoudswet bestaat er een continue symmetrie. Voorbeelden van symmetrieën en overeenstemmende behoudswetten zijn:
- verschuiving in de tijd: behoud van energie;
- translatie in de ruimte: behoud van hoeveelheid van beweging (‘momentum’);
- rotatie: behoud van hoeveelheid van draaibeweging.

Deze drie transformaties vormen samen met de transformatie van assenstelsels die met een constante snelheid t.o.v. elkaar bewegen de Galilei-Newton groep. De Newtoniaanse mechanica is invariant voor de Galilei-Newton groep.

De Newtoniaanse mechanica blijkt ook invariant te zijn voor transformaties van de ruimte, tijd en massa van de vorm:
- $x' = a\,x$, $y' = a\,y$, $z' = a\,z$;
- $t' = b\,t$;
- $m' = c\,m$;

die een 'dimensionele groep' van transformaties vormen en de 'dynamic similitude' weergeven. De wetten van Newton blijven geldig indien men een schaalfactor invoert of de (fundamentele) eenheden wijzigt. Dit brengt ons tot schaalinvariantie, een belangrijke maar miskende vorm van symmetrie.

Er bestaat een vuistregel die stelt dat men bij het uitzetten van proefresultaten op dubbel logaritmisch papier dikwijls een rechte bekomt. Dit is het geval voor:
- de ervaringscurve, het leer-, routine- of reekseffect, de productietijd in functie van het aantal geproduceerde eenheden (of de reeksgrootte), de wet van Wright;
- de 'vergeetkurve';
- de 'improvement curve': de verbetering van de betrouwbaarheid van producten in functie van de tijd (of het aantal km) tijdens prototypetesten t.g.v. het wijzigingsproces, het model van Duane;
- de productiefunctie van Cobb-Douglas: de productiewaarde in functie van de loonsom en de kapitaalwaarde, een econometrisch model;
- de hoofdwet van Taylor: de standtijd van een gereedschap in functie van de snijsnelheid voor welbepaalde verspaningsomstandigheden;
- de wet van Pareto: de 80/20-regel, het Pareto-diagram (kwaliteitscontrole,...);
- de verdelingsfunctie van Weibull (met 2 parameters): de faalsnelheid van producten in functie van de gebruiksduur, een model voor de verschillende fasen van de levenscyclus (badkuipkurve), wordt toegepast bij betrouwbaarheidsanalyse (‘RAMS-analysis’);
- de wet van Zipf: de (relatieve) frequentie van woorden in een tekst in functie van de rangorde (of van het gecumuleerde aantal, d.w.z. voor bijvoorbeeld de meest frequent voorkomende 10 woorden, 100 woorden,...), de lengte van artikels in kranten, het aantal inwoners in steden;
- de verhoudingen en groottes in de biologie: 'de maat van het leven', allometrische formules;
- het aantal celsoorten in functie van de hoeveelheid DNA per cel;
- het aantal attractoren in functie van het aantal genen in een genetisch (Booleaans) netwerkmodel (zie Stuart Kauffman);

- de lengte van een kustlijn in functie van de lengte van de 'meetstok' (zie fractals, zelfgelijkvormigheid, fractale of Hausdorff dimensie);
- de frequentie en grootte van aardbevingen, lawines en uitbarstingen (zie Per Bak, 'self organising criticality', '1/f noise');
- ...
Het gaat telkens om eenvoudige machtswetten van de vorm $y = x^a$ die op dubbel-logaritmisch papier door een rechte kunnen voorgesteld worden. In hun algemene vorm worden machtswetten beschreven door vergelijkingen waarin de verschillende onafhankelijk veranderlijken als een product en met exponenten voorkomen. Dimensionele analyse gaat er bijvoorbeeld van uit dat de relatie tussen de basiseenheden en afgeleide eenheden in een eenhedenstelsel door machtswetten beschreven wordt. Machtswetten zijn schaalinvariant. Men kan machtswetten ook in verband brengen met homogene functies, een klasse van niet-lineaire vergelijkingen met zeer interessante eigenschappen zoals de stelling van Euler.

Het verband tussen de Fibonacci-getallen en de gulden snede kan volgens een vereenvoudigde en benaderende vorm van de wet van Binet eveneens als een machtswet beschouwd worden, maar in dit geval met een veranderlijke exponent. Voorbeelden van de gulden snede en van Fibonnacci-getallen vindt men terug in de meetkunde en de natuur: de gulden spiraal, de vijf platonische lichamen, de voortplanting van konijnen (in geïdealiseerde omstandigheden), de bijenstamboom, de vertakkingswijze van planten, de ordening van bladeren, het aantal bloemblaadjes,… De gulden snede speelt ook een belangrijke rol in de kunst en de architectuur.

Dat machtswetten in verschillende lagen van de werkelijkheid optreden wijst op een algemeen onderliggend principe, een diepere structuur van de werkelijkheid. Sommigen hebben het in dit verband over het fenomeen van ‘universality’ in complexe systemen.

Men kan de machtswetten afleiden uit een algemene fysische eigenschap, het axioma van Bridgman genoemd: *'the ratio of two distinct values of the same derived quantity is independent of the scale used'*. Voor $u = f(x,y,z)$, met bijvoorbeeld u een geometrische eigenschap die van drie lengtes x, y en z afhankelijk is, geldt dat:
$u_1 / u_2 = f(x_1,y_1,z_1) / f(x_2,y_2,z_2) = f(ax_1,ay_1,az_1) / f(ax_2,ay_2,az_2)$.
De suffixen 1 en 2 geven twee verschillende punten aan waarvoor men de functie bepaald heeft en a stelt een factor voor waarmee de (lengte-)eenheid verminderd wordt. Men kan de functie u dan ook beschouwen als een functie van a: u(a). Uit de algemene invariantie-eigenschap van Bridgman volgt dat:
$u_1(a) / u_1(1) = u_2(a) / u_2(1) = g(a)$.
Hieruit kan men afleiden dat:
$g(a) = a^h$ waarin $h = g'(1)$.
Meer algemeen leidt dit tot machtswetten en 'dimensions of all quantities in the form of monomial powers'. Zie 'Handbook of Fluid Dynamics' (blz. 15-5). Merk op dat dit bewijs slechts onder bepaalde voorwaarden geldt (de onafhankelijk variabelen worden uitgedrukt in fundamentele eenheden en niet in afgeleide eenheden). In een meer algemene vorm verschijnt er naast de machtswet ook een functie van dimensieloze grootheden (zie bijvoorbeeld het Reynolds-getal).

In de fysica kunnen de machtwetten ook bewezen worden uitgaande van het Pi-theorema van Buckingham (of Vaschy). In dit algemeen theorema gaat men er van uit dat de fysische wetten geldig zijn voor om het even welke eenheden waarin ze geformuleerd worden ('unit free'). In een eenhedenstelsel wordt er een onderscheid gemaakt tussen fundamentele eenheden en afgeleide eenheden. De fundamentele eenheden zijn dimensioneel onafhankelijk en de afgeleide eenheden worden uit deze fundamentele eenheden afgeleid. Men neemt daarbij ook aan dat de afgeleide eenheden uit dimensioneel homogene definities of wetten volgen en kunnen uitgedrukt worden als (monomiale) machtswetten van de fundamentele eenheden. Men baseert zich dus eigenlijk op schaalinvariantie en dimensionele homogeniteit. Er wordt bijgevolg aangenomen dat de fysische wetten invariant zijn voor een transformatiegroep met schaalverandering van de fundamentele eenheden en de ermee gerelateerde afgeleide eenheden. Men kan aantonen (zie 'Handbook of Fluid Dynamics') dat de fysische wetten onder deze voorwaarden een homogene vorm aannemen. Uiteindelijk wordt er bewezen dat de fysische wetten in een volledig dimensieloze vorm gebracht kunnen worden. Het Pi-theorema houdt dus in feite in dat bij een stelsel van eenheden dat gebaseerd is op dimensioneel homogene definities of wetten, de (andere) verbanden die niet gebruikt worden om dit eenhedenstelsel te definiëren ook dimensioneel homogeen zijn. Het Pi-theorema is de basisstelling van de dimensionele analyse.

Met behulp van dimensionele analyse kan men o.m. verifiëren of formules die men afgeleid heeft wel correct zijn. De vergelijkingen moeten dimensioneel homogeen zijn. Daartoe is het noodzakelijk dat iedere term dezelfde dimensies heeft. Men kan immers 'geen appels en peren optellen'. Dimensionele analyse laat bij het oplossen van fysische problemen ook toe om de algemene vorm van de formules te bepalen zonder dat de fysische wetten die een rol spelen gekend zijn of daarbij (direct) in rekening gebracht worden. Het Pi-theorema biedt daarbij de mogelijkheid om het aantal proeven te reduceren dat noodzakelijk is om een wet experimenteel te bepalen. Merk op dat de eis van dimensionele homogeniteit beperkingen oplegt aan de wiskundige vormen die de wetten van de natuur kunnen aannemen. Men kan hiermee rekening houden in de systeemtheorie om de modellen een fysische 'content' te geven.

Dit alles zou er kunnen op wijzen dat de fundamentele entiteiten waaruit de werkelijkheid bestaat zo opgebouwd zijn dat een miniatuur universum kan geconstrueerd worden dat exact gelijkvormig is aan het bestaande universum (R.C.Tolman). Volgens Garrett Birkhoff zijn echter niet alle fysische wetten dimensioneel homogeen. Hij verwijst naar wetten waarin universele natuurconstanten voorkomen die niet-dimensieloos zijn, zoals de constante van Planck. Bovendien verschalen de fysische karakteristieken van bestaande (en fysisch mogelijke) wezens en artefacten in de meeste gevallen niet proportioneel met de afmetingen (zie o.m. de verhoudingen en groottes in de biologie).

Het is merkwaardig dat men voor heel wat wetten die op dubbel-logaritmisch papier uitgezet worden een rechte bekomt met helling (richtingscoëfficiënt) -1 en -1/2. Dit is o.m. het geval voor de wet van Zipf. De wet van Zipf kan in verband gebracht worden met het 'collectors dilemma' (hoeveel repen chocolade moet men kopen om de volledige reeks prentjes te verzamelen en dit zonder ruilen?). Men brengt de wet van Zipf ook in verband met de 'wet van de verdeelde terugkoppeling' (afgelegde afstand van wandelaars die voor elkaar uitwijken op een smal pad). De wet van Zipf kan aangetoond worden uitgaande van de voorwaarde van schaalinvariantie. Zipf ontwikkelde een hypothese van evenwicht tussen unificerende en diversifiërende krachten (bij de keuze van woorden) en vond een verklaring in het economisch 'principe van kleinste inspanning'. Hij zag ook een relatie met de minimum energie principes uit de mechanica en sterkteleer.

De wet van Zipf kan nog in verband gebracht worden met de wet van Benford of de 'First Digit Law' . In tabellen met statistische en fysische gegevens blijkt het eerste beduidende cijfer van de getallen niet op een gelijkmatige manier verdeeld te zijn (tussen de cijfers 1 tot 9). Het cijfer 1 komt frequenter voor dan de andere cijfers (30,1%). De wet van Benford is schaalinvariant: de eenheden waarin de grootheden uitgedrukt worden spelen geen rol (zie beurskoersen in BEF en Euro). Deze wet kan aangetoond worden uitgaande van de veronderstelling dat hij kan toegepast worden op gegevens die niet dimensieloos zijn zodat de numerische waarden afhankelijk zijn van de eenheden. *Indien er een wet bestaat voor dergelijke lijsten van getallen dan moet hij schaalinvariant zijn.* De wet van Benford is ook basisinvariant. Deze wet blijkt vrij goed op te gaan voor uiteenlopende lijsten met gegevens zoals beurskoersen, kosten (fraudedetectie), huisnummers, lengte van rivieren, cijfers in krantenartikelen, moleculaire gewichten,...

De wet van Lotka levert eveneens een rechte op dubbel-logaritmisch papier op. De helling bedraagt nu echter -2. Deze wet geeft de productiviteit van auteurs weer en legt het verband tussen het aantal per auteur gepubliceerde artikelen en het aantal auteurs dat dit aantal artikelen publiceerde.

Men kan opmerken schaalinvariantie en de eigenschappen van homogene functies nauw met elkaar verwant zijn. De inwendige energie van fysische systemen blijkt door homogene functies gekenmerkt te worden. De eigenschappen van homogene functies spelen samen met de stelling van Euler een grote rol in de 'thermodynamische' bondgrafen methode. Deze methode wordt gebruikt om multidisciplinaire systemen te beschrijven en legt de analogieën tussen de verschillende fysische grootheden vast.

Schaalinvariantie en machtswetten blijken dus een vrij belangrijke plaats in te nemen in zowel de exacte wetenschappen als de menswetenschappen. Dimensionele analyse en de verwante 'theory of similarity' zijn goed gefundeerde en krachtige methodes waarvan de mogelijkheden echter in veel domeinen nog miskend worden.

20/05/2001
02/05/2002
22/07/2003
22/09/2006