Verbindingswetten en energiestellingen

Veralgemeende en analoge vormen van de stelling van Tellegen

De verbindingswetten spelen een nog wat miskende maar toch zeer belangrijke rol bij de studie van elektrische netwerken, mechanische structuren en uiteenlopende systemen. Dat een geheel meer of beter gezegd anders is dan de som van zijn delen kan toegeschreven worden aan de verbindingen tussen de delen. De wetten van Kirchhoff en het continuïteitsprincipe zijn verbindingswetten die voor elektrische netwerken gelden en waarvan de vorm verrassend eenvoudig is. Het is mogelijk om deze wetten uit beschouwingen over objectieve kennis en eisen van symmetrie af te leiden. De stelling van Tellegen, een krachtige energiestelling, kan uit de wetten van Kirchhoff en het continuïteitsprincipe afgeleid worden en drukt het behoud van energie uit over de componenten van een elektrisch netwerk. Opvallend daarbij is de orthogonale vorm van deze stelling. Er bestaan veralgemeende en analoge vormen van de verbindingswetten en de stelling van Tellegen. Ze kunnen meer types van problemen helpen oplossen en zijn in andere ingenieurswetenschappen en wetenschappen toepasbaar. Ook bieden ze een basis voor een veralgemeende en axiomatisch opgebouwde netwerk-, structuur- en systeemtheorie met abstracte energiebegrippen. In deze synthesetekst wordt hier verder op ingegaan.[1]

1. De wetten van Kirchhoff

De wetten van Kirchhoff, een stroomwet en een spanningswet, zijn verbindingswetten die voor elektrische netwerken gelden. Een netwerk bestaat uit een aantal in knooppunten met elkaar verbonden takken.[2] Voor een elektrisch netwerk bestaan de takken uit componenten zoals bijvoorbeeld bronnen, weerstanden, spoelen, capaciteiten en diodes. Deze componenten vormen de takken van het netwerk en worden via hun twee aansluitingen of terminals in knooppunten met elkaar verbonden. In een elektrisch netwerk kan aan elk van de knooppunten een potentiaal toegekend worden. De in een knooppunt verbonden aansluitingen staan op een gelijk potentiaal, het potentiaal van dit knooppunt. Tussen de twee aansluitingen van de componenten bestaat er een potentiaalverschil, een spanning. Door de componenten 'vloeit' er een stroom die via de ene aansluitingen toegevoerd en de andere aansluiting afgevoerd wordt naar de knooppunten waarmee ze verbonden zijn. Volgens de stroomwet van Kirchhoff geldt dat de som van de stromen die naar een knooppunt vloeien gelijk is aan nul.[3] Voor een knooppunt waarop drie componenten aangesloten zijn met stromen I_i, I_j en I_k stelt de stroomwet bijvoorbeeld dat:

$$I_i + I_j + I_k = 0 \qquad (1)$$

De spanning $U_{i,j}$ over een tak i,j waarvan de knooppunten i en j op potentialen P_i en P_j staan is volgens de definitie van spanning als potentiaalverschil:

$$U_{i,j} = P_i - P_j \qquad (2)$$

[1] Het gaat om de synthese van vroegere discussieteksten die te vinden zijn in: https://www.vub.be/CLEA/dissemination/groups-archive/vzw_worldviews
[2] Een netwerk vertoont overeenkomst met een graaf in de wiskunde.
[3] In deze formulering van de stroomwet is de tekenconventie dezelfde voor de verschillende stromen.

Uit deze definitie kunnen we eveneens afleiden dat:

$U_{j,i} = P_j - P_i$

zodat:

$U_{i,j} = - U_{j,i}$ (3)

Merk op dat de vergelijking (2) ook geldig blijft indien P_i en P_j met een constante C gewijzigd wordt. Inderdaad de waarde voor $U_{i,j}$ verandert niet:

$U_{i,j} = (P_i + C) - (P_j + C) = P_i - P_j$ (4)

Dat de elektrische potentialen slechts op een constante na bepaald zijn is dus geen probleem voor de definitie van een spanning $U_{i,j}$.

In een netwerk kan men mazen, gesloten lussen van takken, onderkennen. Voor een maas met bijvoorbeeld knooppunten i, j en k geldt volgens de spanningwet van Kirchhoff:

$U_{i,j} + U_{j,k} + U_{k,i} = 0$ (5)

De stroom- en spanningswet hebben een gelijkaardige vorm en zijn dus elkaars duale.

De wetten van Kirchhoff hebben ook een opmerkelijk eenvoudige vorm. Het gaat om lineaire functies die onafhankelijk zijn van de tijd. De stromen en spanningen zijn van elkaar ontkoppeld. De stroom- en spanningswet blijven geldig indien er zogenaamde Kirchhoff-operatoren op toegepast worden zoals vermenigvuldiging met een constante, differentiatie en integratie in de tijd en het berekenen van tijdsgemiddelden.[4] De lineaire vorm van deze wetten wordt immers niet door deze operatoren gewijzigd.

In de elektrische netwerktheorie wordt de stroomwet verklaard met de wet van behoud van lading en de spanningswet met de definitie van potentiaal in een elektrisch veld.[5]

2. Bewijs van de spanningswet van Kirchhoff

De spanningswet van Kirchhoff is gemakkelijk te bewijzen. Uit (2) kunnen we bijvoorbeeld voor de takken van een maas i,j , j,k en k,i en potentialen P_i , P_j en P_k in de knooppunten i, j en k afleiden dat de spanningen over de takken gelijk zijn aan:

$U_{i,j} = P_i - P_j$
$U_{j,k} = P_j - P_k$
$U_{k,i} = P_k - P_i$

[4] Zie blz. 13 en 113 in: https://ia802901.us.archive.org/30/items/TELLEGENSTHEOREMANDELECTRICALNETWORKS/TELLEGEN%27S%20THEOREM%20AND%20ELECTRICAL%20NETWORKS.pdf

[5] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Elektriciteitswetten_van_Kirchhoff en https://nl.wikipedia.org/wiki/Elektrische_potentiaal

Worden deze vergelijkingen opgeteld en vereenvoudigd dan bekomen we de spanningswet voor potentiaalverschillen of spanningen (5):

$U_{i,j} + U_{j,k} + U_{k,i} = 0$

We vinden ook een vergelijking van de spanningswet in potentiaalvorm[6]:

$(P_i - P_j) + (P_j - P_k) + (P_k - P_i) = 0$ (6)

Beschouwen we een tak met knooppunten i en j en voeren we een referentiepunt 0 in dan kunnen we voor depotentialen P_i, P_j en P_0 de volgende identiteit schrijven:

$P_i - P_j = (P_i - P_0) + (P_j - P_0)$

Dan volgt uit de definitie van spanning (2):

$U_{i,j} = U_{i,0} - U_{j,0}$

Voor een referentiepunt 0' met een potentiaal $P_{0'}$ kan men op dezelfde wijze afleiden dat:

$U_{i,j} = P_i - P_j = (P_i - P_{0'}) - (P_j - P_{0'}) = U_{i,0'} - U_{j,0'}$

Uit de vorige twee vergelijkingen volgt dan:

$U_{i,j} = U_{i,0} - U_{j,0} = U_{i,0'} - U_{j,0'}$ (7)

Het spanningsverschil $U_{i,j}$ is dus invariant voor de keuze van referentiepunt. Observatoren die verschillende referentiepunten gebruiken kunnen dan dezelfde spanning tussen twee knooppunten meten. De invariantie voor de keuze van het referentiepunt is een voorwaarde die objectieve kennis mogelijk maakt. Het gaat om een vorm van symmetrie.[7]

3. Bewijs van de stroomwet van Kirchhoff

We wezen er reeds op dat stroom- en spanningswet duaal zijn. De stroomwet zou dus op een gelijkaardige manier als de spanningswet moeten kunnen afgeleid worden. Daartoe is echter een begrip vereist dat duaal is aan potentiaal.

Bij de studie van planaire netwerken wordt een fictieve stroom, de maasstroom, ingevoerd.[8] Deze maasstroom kan als de duale van potentiaal beschouwd worden. Voor een knooppunt waaraan de takken i, j en k met stromen I_i, I_j en I_k verbonden zijn worden de maasstromen door het volgend stelsel van vergelijkingen gedefinieerd:

---

[6] Merk op dat het om een identiteit gaat die aan een tautologie doet denken. Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Identity_(mathematics) en https://nl.wikipedia.org/wiki/Tautologie_(logica)
[7] Een symmetrie laat bepaalde kenmerken van een systeem ongewijzigd onder een transformatie: https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_(physics)
[8] Planaire netwerken zijn vlakke netwerken met takken die elkaar niet kruisen.

$$\left.\begin{array}{l} I_i = J_{i,k} - J_{j,i} \\ I_j = J_{j,i} - J_{k,j} \\ I_k = J_{k,j} - J_{i,k} \end{array}\right\} (8)$$

De som van deze vergelijkingen leidt onmiddellijk tot de stroomwet:

$$I_i + I_j + I_k = 0 \quad (9)$$

Deze vergelijking is de duale van de spanningswet (5). Dualiteit is ook een vorm van symmetrie.

Men kan zich afvragen of de maasstromen wel kunnen bepaald worden uitgaande van takstromen die aan de stroomwet voldoen. Om deze fictieve maasstromen $J_{i,k}$, $J_{j,i}$ en $J_{k,j}$ af te leiden uit de takstromen I_i, I_j en I_k moet het stelsel vergelijkingen (8) opgelost worden. Uit de eerste twee vergelijkingen kunnen we afleiden dat:

$$J_{i,k} = I_i + J_{j,i}$$
$$J_{k,j} = - I_j + J_{j,i}$$

De derde vergelijking van het stelsel (8) leidt rekening houdend met de vorige vergelijkingen en de stroomwet (9) tot de twee volgende identiteiten:

$$J_{i,k} = - I_k + J_{k,j} = - I_k + (- I_j + J_{j,i}) = (- I_k - I_j) + J_{j,i} = I_i + J_{j,i} = J_{i,k}$$
$$J_{k,j} = I_k + J_{i,k} = I_k + (I_i + J_{j,i}) = (I_k + I_i) + J_{j,i} = - I_j + J_{j,i} = J_{k,j}$$

Het stelsel (8) blijkt onbepaald te zijn en heeft oneindig veel oplossingen.[9] De maasstromen kunnen echter wel afgeleid worden door aan $J_{j,i}$ een willekeurige waarde toe te kennen. $J_{i,k}$ en $J_{k,j}$ zijn immers op $J_{j,i}$ na bepaald. Dit wordt in de volgende figuur verduidelijkt:

```
                              I_i
                  |------------------------------------------------------->|
                  |              I_j             |          I_k            |
                  |<-------------------------------- <-------------------------|
                  |                              |                         |
----------------------------------------------------------------------------------------------------->
|      J_j,i      |                              |                         |
| ----------------->|                            |                         |
|                   J_k,j                        |                         |
|------------------------------------------------------->|                 |
|                              J_i,k                                       |
| ------------------------------------------------------------------------------->|
```

Merk op dat de stroomwet (9) voldaan is en dat de keuze van een willekeurige $J_{j,i}$ het mogelijk maakt om $J_{i,k}$ en $J_{k,j}$ te berekenen.

---

9 Zie voor informatie over het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen: https://nl.wikipedia.org/wiki/Stelsel_van_lineaire_vergelijkingen

Wordt de stroomwet van Kirchhoff geïntegreerd in de tijd dan bekomen we de wet van behoud van lading.[10]

4. De stelling van Tellegen

De stelling van Tellegen drukt het behoud van vermogen over de verschillende takken i van een elektrisch netwerk uit.[11] Voor een netwerk met takspanningen U_i en takstromen I_i geldt:

$\Sigma_i U_i . I_i = 0$ (10)

De spanningen U_i en stromen I_i zijn dus orthogonaal.[12] Om deze elegante vorm van de stelling van Tellegen te bekomen is vereist dat voor alle componenten dezelfde tekenconventie gekozen wordt. De waarde van een stroom die in de richting van de componenten vloeit beschouwen we hier als positief.

Maken we een onderscheid tussen actieve takken j en passieve takken k dan kan men uit (10) afleiden dat:

$\Sigma_j U_j . (-I_j) = \Sigma_k U_k . I_k$

Indien de tekenconventie van de stromen I_j in deze vergelijking aangepast wordt vinden we:

$\Sigma_j U_j . I_j = \Sigma_k U_k . I_k$ (11)

De balans van het door de actieve takken toegevoerd vermogen en het in de passieve takken van het netwerk opgenomen vermogen is dus sluitend. Het door de bronnen geleverd vermogen wordt volledig in de andere componenten opgenomen. Het gaat hier dus om een behoudswet, echter niet in de tijd maar over de ruimte.[13]

De stelling van Tellegen is gebaseerd op de stroom- en spanningswet van Kirchhoff voor de verbindingen en op het continuïteitsprincipe voor de componenten van een elektrisch netwerk. Volgens dit beginsel verlaat de stroom die een component binnenvloeit deze component ongewijzigd. Met een aangepaste tekenconventie voor de stroom die de component verlaat wordt het continuïteitsprincipe als volgt geformuleerd: de som van de elektrische stromen die een component instromen is gelijk aan nul.

Als voorbeeld kunnen we de stelling van Tellegen aantonen voor een vrije component.[14] Voor een vrije component die in de knooppunten i en j op spanningsbronnen aangesloten is

---

[10] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Charge_conservation
[11] Daar het vermogen de hoeveelheid energie per tijdseenheid is gaat het ook om het behoud van energie.
[12] Orthogonaliteit is een veralgemening van het begrip loodrechtheid: https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonality
Deze abstracte vorm van orthogonaliteit is in veel domeinen van de wetenschap terug te vinden.
[13] De meer bekende wet van behoud van energie drukt het behoud in de tijd uit bij energietransformaties.
[14] De aansluitingen of terminals van een vrije component zijn niet met een referentiepunt verbonden.

en met een gemeenschappelijk referentiepunt 0 vinden we volgens de spanningswet van Kirchhoff en het continuïteitsprincipe:

$U_{i0} = U_{ij} + U_{j0}$
$- I_{i0} = I_{ij} = - I_{ji} = I_{j0}$

Hieruit volgt dat:

$U_{i0} . I_{i0} + U_{ij} . I_{ij} + U_{j0} . I_{j0} = U_{i0} . (-I_{ij}) + (U_{i0} - U_{j0}) . I_{ij} + U_{j0} . I_{ij} = 0$ (12)

Een netwerk bestaande uit twee bronnen en een vrije component voldoet dus aan de stelling van Tellegen (10).

We verduidelijken het bewijs van de stelling van Tellegen verder in de onderstaande tabel met twee eenvoudige voorbeelden van een netwerk bestaande uit een bron en twee passieve componenten:

Serieschakeling	**Parallelschakeling**
Verbindingsvoorwaarden: $-I = I_1 = I_2$ $U = U_1 + U_2$	Verbindingsvoorwaarden: $U = U_1 = U_2$ $- I = I_1 + I_2$
Stelling van Tellegen: $U . I = (U_1 + U_2) . I$ $U . I = U_1 . (-I_1) + U_2 . (-I_2)$ $U . I + U_1 . I_1 + U_2 . I_2 = 0$	Stelling van Tellegen: $U . I = U . [-(I_1 + I_2)]$ $U . I = U_1 . (-I_1) + U_2 . (-I_2)$ $U . I + U_1 . I_1 + U_2 . I_2 = 0$

Let op de dualiteit van de stromen en spanningen tussen de beide schakelingen.

De stelling van Tellegen kan vrij eenvoudig in een matrixvorm bewezen worden door een 'verbindingsmatrix' in te voeren.[15] Deze verbindingsmatrix |A| geeft aan hoe de takken aan de knooppunten verbonden zijn en legt de topologie van het netwerk vast. De stroomwet wordt dan gegeven door:

$|A|.|I| = |0|$ (12)

Voor de spanning over de takken |U| en potentialen in de knooppunten|P| geldt volgens de definitie van spanning over een tak (2) dat:

[15] Voor meer informatie over dit bewijs zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Tellegen%27s_theorem
Ter illustratie van dit bewijs wordt verwezen naar een netwerkvoorbeeld van Wolaver. De verbindingsmatrix |A| en zijn getransponeerde $|A|^t$ werden echter omgewisseld in dit voorbeeld dat ook te vinden is in: https://web.archive.org/web/20091229102451/http://www.wolaver.org/math/Tellegen.pdf

$|U| = |A|^t.|P|$ (13)

De getransponeerde $|A|^t$ van $|A|$ wordt bekomen door de rijen en kolommen van $|A|$ om te wisselen.

Uit de verbindingsvoorwaarden (12) en (13) kunnen we de stelling van Tellegen als volgt afleiden:

$$|U|^t.|I| = [|A|^t.|P|]^t.|I| = [|P|^t.|A|].|I| = |P|^t.[|A|.|I|] = 0$$

We kunnen hieruit besluiten dat:

$|U|^t.|I| = 0$ (14)

Dit is de matrixvorm van (10). Een voorbeeld van dit bewijs wordt in Appendix 1 gegeven.

De verbindingsmatrix $|A|$ en zijn getransponeerde $|A|^t$ leggen vast hoe de componenten van een netwerk met elkaar in knooppunten verbonden zijn. Ze beschrijven de topologie van het netwerk rekening houdend met de tekenconventies.[16] De waarde van de elementen van de verbindingsmatrix $|A|$ is afhankelijk van de verbindingen van de componenten met de knooppunten en van de als positief of negatief beschouwde oriëntatie van de stromen die via de componenten in de knooppunten toekomen. De elementen van $|A|$ en $|A|^t$ hebben een waarde 0, 1 of -1.[17]

De elementen van een rij i van de verbindingsmatrix $|A|$ duiden aan welke componenten met een knooppunt verbonden zijn en wat de oriëntatie van de stroom is. Beschouw bijvoorbeeld een knooppunt i waarop onder andere de componenten k en l aangesloten zijn. Volgens de stroomwet van Kirchhoff geldt voor dit knooppunt:

$$A_{ik} . I_{ik} + A_{il} . I_{il} + ... = \Sigma_n A_{in} . I_{in} = 0$$

De vergelijking (12) vat de stroomwet voor de verschillende knooppunten in matrixvorm samen.

De elementen van de rijen van $|A|^t$ bepalen met welke knooppunten een component verbonden is. Voor de spanning over een component k die met knooppunt i en j verbonden is hebben we volgens de definitie van spanning als potentiaalverschil:

$$U_{ij} = P_i - P_j$$

In een rij k van $|A|^t$ vinden we naast nullen een paar 1 en -1. Elke component is immers met

[16] Zie i.v.m. netwerktopologie en gerichte grafen: https://www.tutorialspoint.com/network_theory/network_theory_topology.htm

[17] Zie het netwerkvoorbeeld van Wolaver in: https://web.archive.org/web/20091229102451/http://www.wolaver.org/math/Tellegen.pdf
Merk op dat de verbindingsmatrix $|A|$ en zijn getransponeerde $|A|^t$ omgewisseld werden.

twee knooppuntenverbonden. Voor component k vinden we bijvoorbeeld $A^t_{ki} = 1$ en $A^t_{kj} = -1$. Hieruit volgt voor de spanning over deze component dat:

$U_{ij} = 1 \,.\, P_i + (-1) \,.\, P_j = A^t_{ki} + A^t_{kj} = \Sigma_m A^t_{km} \,.\, P_m$

Voor een kolom van |A| wordt dit:

$U_{ij} = 1 \,.\, P_i + (-1) \,.\, P_j = A_{ik} + A_{jk} = \Sigma_m A_{mk} \,.\, P_m = \Sigma_m A^t_{km} \,.\, P_m$

De vergelijking (13) komt overeen met de definitie van spanning voor de verschillende componenten die in een matrixvorm samengebracht werden.

Een rij van |A| legt voor een knooppunt vast welke componenten ermee verbonden zijn. Een kolom van |A| geeft voor een component aan met welke knooppunten deze component verbonden is. Dit wordt in de onderstaande figuur geïllustreerd voor de verbindingsmatrix |A|.

-----> component k

| -----> component l

| |

0 0 0 0 0 0 0 0 0

knooppunt i --> 0 0 $\mathbf{A_{ik}}$ 0 0 0 $\mathbf{A_{il}}$ 0 0 ----> stroomwet $\Sigma_n A_{in} \,.\, I_{in} = 0$

0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0

knooppunt j --> 0 0 $\mathbf{A_{jk}}$ 0 0 0 $\mathbf{A_{jlk}}$ 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0

|

----> definitie van spanning $U_{ij} = \Sigma_m A_{mk} \,.\, P_m = \Sigma_m A^t_{km} \,.\, P_m$

De elementen A_{ij} en A^t_{ji} geven dus de verbindingsinformatie voor hetzelfde knooppunt en dezelfde component weer.

Merk op dat we het bewijs de stelling van Tellegen in feite baseerden op de spanningswet in de vorm (6) waarin potentialen in plaats van spanningen over de takken gebruikt worden. Samen met de matrixformulering leidt dit tot de elegante vorm van bewijs.

Het is ook mogelijk om de stelling van Tellegen aan te tonen uitgaande van spanningen die ten opzichte van een referentiepunt bepaald worden in de plaats van potentialen. Daartoe voeren we referentiepunt 0 in. Volgens (2) geldt:

$U_{ij} = P_i - P_j = (P_i - P_0) - (P_j - P_0) = U_{i,0} - U_{j,0}$

Rekening houdend met de vaststelling dat de rij k van $|A|^t$ naast nullen uit een paar 1 en -1 in de positie i en j bestaat volgt hieruit:

$U_{ij} = \Sigma_l A^t_{kl} \,.\, P_l = A^t_{ki} \,.\, P_i + A^t_{kj} \,.\, P_j = 1 \,.\, P_i + (-1) \,.\, P_j = 1 \,.\, (P_i - P_0) + (-1) \,.\, (P_j - P_0) = 1 \,.\, U_{i,0} + (-1) \,.\, U_{i,0}$

We kunnen dan ook schrijven dat:

$U_{ij} = \Sigma_l A^t_{kl} . U_{l,0}$

In matrixvorm samengevat wordt dit:

$|U| = |A|^t.|U_0|$

Een voorbeeld van de verbindingsmatrix |A| en zijn getransponeerde $|A|^t$ waarbij spanningen beschouwd worden is in Appendix 2 te vinden.

De stelling van Tellegen kan dan als volgt bewezen worden:

$|U|^t.|I| = [|A|^t.|U_0|]^t.|I| = [|U_0|^t.|A|].|I| = |U_0|^t. [|A|.|I|] = 0$

Om de stelling van Tellegen te verhelderen kunnen we een onderscheid maken tussen de verbindingen en de componenten van een elektrisch netwerk. Via de knooppunten verdelen verbindingen de stromen en spanningen over de componenten van het netwerk. Indien de componenten afzonderlijk en los van elkaar beschouwd worden dan nemen ze samen een vermogen $|U|^t.|I|$ op. Als aangenomen wordt dat de energiebalans (11) voor de actieve en passieve componenten geldig is kunnen we schrijven dat:

$|U|^t.|I|= 0$

Deze vergelijking komt ook overeen met de stelling van Tellegen (14) voor een netwerk waarbij de componenten wel met elkaar verbonden zijn. De afzonderlijk beschouwde verbindingen nemen dus geen vermogen op en het door de bronnen toegevoerd vermogen is in de andere componenten van het netwerk terug te vinden.[18]

De stelling van Tellegen is zeer algemeen. Ze geldt onder andere voor netwerken met actieve en passieve, lineaire en niet-lineaire, tijdsvariante en tijdsinvariante componenten.[19] Alleen de wetten van Kirchhoff en het continuïteitsprincipe moeten immers gerespecteerd worden. De verbindingsvoorwaarden beschrijven de verdeling van de stromen in en de spanningen over de componenten van een netwerk. Ze houden daarbij slechts rekening met de topologie van het netwerk en het continuïteitsprincipe. De fysische inhoud van de componenten speelt dus geen rol. De stelling is ook voor zowel gelijkstroom als wisselstroom toepasbaar.[20] Bovendien blijft de stelling van Tellegen geldig indien we Kirchhoff-operatoren toepassen op de stromen en/of de spanningen.[21]

[18] Vanuit een energiestandpunt gezien is de meerwaarde van het gehele netwerk ten opzicht van zijn delen niet in de verbindingen te vinden.
[19] Zie: http://www.ee.ic.ac.uk/r.spence/pubs/PSD70.pdf en blz. xiii in: https://ia802901.us.archive.org/30/items/TELLEGENSTHEOREMANDELECTRICALNETWORKS/TELLEGEN%27S%20THEOREM%20AND%20ELECTRICAL%20NETWORKS.pdf
[20] Daarbij wordt voor lineaire wisselstroomnetwerken met complexe getallen gerekend: https://nl.wikipedia.org/wiki/Complexe_wisselstroomrekening.
[21] Zie blz. 11 en 113 in: https://ia802901.us.archive.org/30/items/TELLEGENSTHEOREMANDELECTRICALNETWORKS/TELLEGEN%27S%20THEOREM%20AND%20ELECTRICAL%20NETWORKS.pdf

Zoals reeds opgemerkt werd drukt de stelling van Tellegen het behoud van energie in de ruimte uit. Door de termen van (10) naar de tijd te integreren bekomen we de wet van behoud van energie:

$\Sigma_i \int^t U_i \,.\, I_i \,.\, dt = 0$

Merk echter op dat Tellegen een stelling bewees die meer algemeen is dan de wet van behoud van energie. Hij beschouwde immers een elektrisch netwerk in twee verschillende toestanden.[22] Daar de stroom- en spanningswetten van Kirchhoff ontkoppeld zijn mogen we de stromen en spanningen op verschillende tijdstip beschouwen. Dit leidt tot een abstracte vorm van vermogen die quasi-vermogen genoemd wordt.

De stelling van Tellegen is zeer krachtig en men kan er tal van stellingen uit afleiden. Het gaat soms om zeer 'exotische' stellingen. Meer informatie hierover is te vinden in het standaardwerk van P. Penfield, R. Spence en S. Duinker,'*Tellegen's Theorem and Electrical Networks*', en hun daarbij aansluitende publicatie, '*A Generalzed Form of Tellegen's Theorem*'.[23]

Stellingen met de vorm van de stelling van Tellegen gelden ook voor analoge netwerken met paren van veranderlijken die voldoen aan verbindingsvoorwaarden die gelijkaardig zijn aan de wetten van Kirchhoff en aan het continuïteitsprincipe.[24] Verrassend is dat er stellingen die analoog zijn aan de stelling van Tellegen kunnen afgeleid worden voor elektromagnetische velden (de golfvergelijkingen van Maxwell) en de kwantummechanica (de golfvergelijking van Schrödinger).[25]

5. Veralgemeende en analoge vormen van de stelling van Tellegen

Het is mogelijk om de stelling van Tellegen verder te veralgemenen tot de theorie der toegevoegde netwerken en theorie der toegevoegde structuren. Hierdoor wordt ze nog vruchtbaarder en in meer domeinen toepasbaar. Voorbeelden hiervan zijn de methodes voor de berekening en gevoeligheidsanalyse van mechanische structuren. Samen met de wetten van Kirchhoff en het continuïteitsprincipe biedt de stelling van Tellegen een basis voor een veralgemeende, unificerende en axiomatisch gestructureerde netwerk-, structuur- en systeemtheorie. Deze theorie maakt het mogelijk om de ingenieurswetenschappen te

---

[22] Zie het '*Quasi-Power Theorem*' op blz. 7 in:
https://ia802901.us.archive.org/30/items/TELLEGENSTHEOREMANDELECTRICALNETWORKS/TELLEGEN%27S%20THEOREM%20AND%20ELECTRICAL%20NETWORKS.pdf

[23] P. Penfield, R. Spence and S. Duinker, *Tellegen's Theorem and Electrical Networks*, Research Monograph No. 58, The M.I.T Press, Cambridge Massachusetts, 1970
https://ia802901.us.archive.org/30/items/TELLEGENSTHEOREMANDELECTRICALNETWORKS/TELLEGEN%27S%20THEOREM%20AND%20ELECTRICAL%20NETWORKS.pdf en:
http://www.ee.ic.ac.uk/r.spence/pubs/PSD70.pdf

[24] Voorbeelden zijn te vinden in: https://en.wikipedia.org/wiki/Mechanical%E2%80%93electrical_analogies en https://en.wikipedia.org/wiki/Mechanical%E2%80%93electrical_analogies#Other_energy_domains

[25] Zie blz. 109 en 110 in:
https://ia802901.us.archive.org/30/items/TELLEGENSTHEOREMANDELECTRICALNETWORKS/TELLEGEN%27S%20THEOREM%20AND%20ELECTRICAL%20NETWORKS.pdf en:
http://www.quantum-chemistry-history.com/Kron_Dat/Kron-1945/Kron-PR-1945/Kron-PR-1945.htm

integreren. Er is nood aan een dergelijke theorie om de steeds complexer wordende multidisciplinaire problemen op te lossen waarmee ingenieurs in de praktijk tijdens hun loopbaan geconfronteerd worden.

In de theorie der toegevoegde netwerken beschouwt naast een gegeven netwerk ook een toegevoegd netwerk. Deze twee netwerken hebben dezelfde topologie en nummering van knoopunten.[26] De verbindingsmatices van de beide netwerken zijn dus gelijk. De spanningen over de takken van het gegeven netwerk en de stromen door de takken van het toegevoegd netwerk voldoen aan de spanningswet en de stroomwet van Kirchhoff en het continuïteitsprincipe. Voor spanningen $|\mathrm{U}|$, stromen $|\mathrm{I}|$ en potentialen $|\mathrm{P}|$ in het gegeven netwerk en $|U|$, $|I|$ en $|P|$ in het toegevoegd netwerk geldt volgens de veralgemeende stelling van Tellegen:

$$|\mathrm{U}|^{t}.|I| = 0$$
$$|\mathrm{I}|^{t}.|U| = 0$$

Uit de stroomwet van Kirchhoff en de definitie van spanning als potentiaalverschil voor het gegeven en het toegevoegd netwerk met verbindingsmatrices $|\mathrm{A}|$:

$$|\mathrm{A}|.|\mathrm{I}| = |0|$$
$$|\mathrm{A}|.|I| = |0|$$
$$|\mathrm{U}| = |\mathrm{A}|^{t}.|\mathrm{P}|$$
$$|U| = |\mathrm{A}|^{t}.|P|$$

volgt immers:

$$|\mathrm{U}|^{t}.|I| = [|\mathrm{A}|^{t}.|\mathrm{P}|]^{t}.|I| = [|\mathrm{P}|^{t}.|\mathrm{A}|].|I| = |\mathrm{P}|^{t}.\,[|\mathrm{A}|.|I|] = 0 \qquad (15)$$
$$|\mathrm{I}|^{t}.|U| = |\mathrm{I}|^{t}\,[|\mathrm{A}|^{t}.|P|] = [|\mathrm{I}|^{t}.|\mathrm{A}|^{t}].|P| = \{|P|^{t}.[|\mathrm{A}|.|\mathrm{I}|]\}^{t} = 0 \qquad (16)$$

Dit eenvoudig bewijs leidt tot twee veralgemeende vormen van de stelling van Tellegen die zeer contra-intuïtief zijn. Het gaat om de basisstellingen van de theorie der toegevoegde netwerken.

Deze veralgemening van de stelling van Tellegen geldt niet alleen voor netwerken bestaande uit componenten met twee aansluitingen of één poort waarmee ze aangesloten worden maar ook voor netwerken met multi-poorten.[27] Dit is bijvoorbeeld het geval voor netwerken met transistoren. Het is mogelijk om het bewijs van deze stelling verder te veralgemenen door het invoeren van Kirchhoff-operatoren.

---

[26] In het toegevoegd netwerk mogen wel takken weggenomen worden. Daarbij moeten echter alle knooppunten behouden blijven en door takken met elkaar verbonden zijn om het toegevoegd netwerk samenhangend te houden. De weggelaten takken komen dan overeen met takken die door een stroom met waarde nul doorlopen worden. In bepaalde toepassingen van de stelling van Tellegen maakt deze benadering het mogelijk om de berekeningen te vereenvoudigen.

[27] Voor informatie over poorten en multi-poorten, ook n-poorten genoemd, zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Port_(circuit_theory)

De veralgemeende stelling van Tellegen gaat ook op indien we een gegeven netwerk op een bepaald tijdstip beschouwen en het zelfde netwerk op een ander tijdstip als toegevoegd netwerk in rekening brengen. In het geval van wisselstroom moeten het gegeven en toegevoegd netwerk niet noodzakelijk dezelfde frequentie hebben.

In de theorie der toegevoegde netwerken verschijnen dus abstracte veralgemeende vormen van vermogen $|U|^t.|I|$ en $|I|^t.|U|$. Het is vreemd dat de stelling van Tellegen opgaat voor een dergelijke definitie van energie, maar deze veralgemening blijkt toch interessante toepassingen te hebben.

Een belangrijke toepassing van de theorie der toegevoegde netwerken is gevoeligheidsanalyse. Uitgaande van de veralgemeende stelling van Tellegen wordt het mogelijk om de invloed van een wijziging van een componentparameter op de spanningen en stromen in een netwerk te berekenen. Een volledige herrekening van de verdeling van de spanningen en stromen over het netwerk is daarbij niet nodig. Dit kan interessant zijn bij het optimaliseren van complexe netwerken.[28]

Indien we een gegeven en toegevoegd netwerk beschouwen en er van uitgaan dat de spanningwet bekend is dan kunnen we de stroomwet uit een veralgemeende stelling van Tellegen afleiden. Volgens van de vergelijking (16) geldt:

$$|I|^t.|U| = \{|P|^t.[|A|.|I|]\}^t$$

Opdat de stelling van Tellegen zou opgaan is het noodzakelijk dat deze vergelijking gelijk is aan nul voor de potentialen in de knooppunten $|P|$ van alle mogelijke toegevoegde netwerken. Aan deze voorwaarde is voldaan als:

$$\{|P|^t.[|A|.|I|]\}^t = 0$$

Daartoe is vereist dat de stroomwet voor het gegeven netwerk geldig is:

$$|A|.|I| = |0|$$

Het is dus mogelijk om de stroomwet af te leiden uit de veralgemeende stelling van Tellegen en de definitie van spanning als potentiaalverschil.

We kunnen de stelling van Tellegen verder veralgemenen door veralgemeende vrije componenten in te voeren. Het is mogelijk om een stelling af te leiden die overeenkomt met de stelling van Tellegen voor netwerken met vrije componenten waarvan de eigenschappen op een welbepaalde manier veralgemeend werden. Het continuïteitsprincipe en de spanningswet van Kirchhoff voor een vrije component worden als volgt veralgemeend:

$$I_{ji} = - V_{ij} . I_{ij} \qquad (17)$$
$$U_{i0} = U_{ij} + V_{ij} . U_{j0} \qquad (18)$$

---

[28] Zie: blz. 530- 536 in https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-01632-9 en http://www.sos.mcmaster.ca/publications/361.pdf

De 'overdrachtsfactor' V_{ij} is een constante verschillend van nul.[29]

Voor de stromen in de knooppunten blijft de stroomwet geldig:

$I_{i0} = -I_{ij}$ (19)
$I_{j0} = -I_{ji}$ (20)

zodat uit (17) volgt:

$I_{j0} = -I_{ji} = -(-V_{ij} . I_{ij}) = V_{ij} . I_{ij}$

We vinden dan voor een veralgemeende vrije component die in de knooppunten i en j op spanningsbronnen aangesloten is en een referentiepunt 0 heeft dat:

$U_{i0} . I_{i0} + U_{ij} . I_{ij} + U_{j0} . I_{j0} = U_{i0} . (-I_{ij}) + (U_{i0} - V_{ij} . U_{j0}) . I_{ij} + U_{j0} . V_{ij} . I_{ij} = 0$

Een netwerk bestaande uit twee bronnen en een vrije component met volgens (17) en (18) veralgemeende eigenschappen voldoet dus ook aan de stelling van Tellegen in de vorm (14).

De stelling van Tellegen geldt ook voor een netwerk bestaande uit met elkaar verbonden veralgemeende vrije componenten. Daartoe passen we de verbindingsmatrix |A| aan.

Zoals reeds opgemerkt werd leggen de elementen van de rij i van de verbindingsmatrix |A| vast welke componenten i,j met het knooppunt i verbonden zijn en geven ze de oriëntaties van de stromen in deze componenten aan. In de rij i van de verbindingsmatrix vervangen we op A_{ij} na alle elementen die verschillend zijn van nul door $V_{ij} . A_{ij}$. Voor het knooppunt i bekomen we dan bijvoorbeeld met $A_{ij} = 1$, $A_{ik} = 1$, en alle k verschillend van j:

$\Sigma_j A_{ij} . I_{ij} = A_{ij} . I_{ij} + \Sigma_k A_{ik} . I_{ik} = A_{ij} . I_{ij} + \Sigma_k V_{ik} . A_{ik} . I_{ik} = 1. I_{ij} + V_{ik} . I_{ik} = 0$

Voor verschillende knooppunten samengevat wordt de veralgemeende vorm van de stroomwet dan:

$|A|.|I| = |0|$

De rijen van $|A|^t$ bepalen de spanning over de verschillend componenten van het netwerk. In een rij k van $|A|^t$ wordt voor een component i,j naast de nullen een paar 1 en $-V_{ij}$ ingevoerd. We vinden nu bijvoorbeeld $A_{ki} = 1$ en $A_{kj} = -V_{ij}$. Hieruit volgt voor de spanning over deze component dat:

$U_{ij} = \Sigma_l A^t_{kl} . P_l = A_{ki} . U_{i0} + A_{kj} . U_{j0} = 1 . U_{i0} + (-V_{ij}) . U_{j0} = U_{i0} - V_{ij} . U_{j0}$

De veralgemeende definitie van spanning wordt dus voor de verschillende componenten

---

[29] De idee om een overdrachtsmatrix in te voeren komt uit de theorie der mechanische structuren. De overdrachtsmatrix maakt het in deze theorie mogelijk om met een hefboomeffect rekening te houden.

beschreven door:

$|U| = |A|^t.|U_0|$

Zoals bij het afleiden van (14) volgt hieruit de veralgemeende vorm van de stelling van Tellegen:

$|U|^t.|I| = [|A|^t.|U_0|]^t.|I| = [|U_0|^t.|A|].|I| = |U_0|^t. [|A|.|I|] = 0$

Op een gelijkaardige manier kan de stelling van Tellegen veralgemeen worden voor een gegeven en toegevoegd netwerk bestaande uit veralgemeende vrije componenten. We bekomen dan de basisstellingen van de theorie der toegevoegde netwerken in de vorm (15) en (16).

De stelling van Tellegen voor een veralgemeende vrije component kan verder veralgemeend worden door kolommatrices in te voeren voor de stromen en spanningen. Het veralgemeend continuïteitsprincipe en de veralgemeende spanningswet van Kirchhoff voor deze vrije component kunnen in dit geval als volgt in matrixvorm gebracht worden met een 'overdrachtsmatrix'$|V_{ij}|$:

$|I_{ij}| = -|V_{ij}|.|I_{ji}|$ (21)
$|U_{i0}| = |U_{ij}| + |V_{ij}|^t.|U_{j0}|$ (22)

De veralgemeende stroomwet in de knooppunten wordt in matrixvorm met k verschillend van j:

$|I_{ij}| = - \Sigma_{ik} |V_{ik}|.|I_{ik}|$

Om de stelling van Tellengen in dit geval voor een netwerk af te leiden passen we de verbindingmatrix $|A|$verder aan. We vervangen de overdrachtsfactoren V_{ij} door de overdrachtsmatrices$|V_{ij}|$ en voeren voor de constanten 0 en 1 de matrices $|0|$ en de diagonaalmatrices$|1|$ in.

De zo verder aangepaste verbindingsmatrix $|A|$ leidt ook tot de stelling van Tellegen in de vorm (14). Uit deze vergelijkingen kunnen we eveneens de basisstellingen van de theorie der toegevoegde netwerken (15) en (16) voor een gegeven en toegevoegd netwerk afleiden.

De veralgemening van de stelling van Tellegen voor veralgemeende vrije componenten is vooral interessant in matrixvorm. De matrixvergelijkingen (21) en (22) gelden ook voor componenten of vrije deelnetwerken met twee of meer dan twee aansluitingen. Het veralgemeend continuïteitsprincipe (21) komt dan overeen met de stroomwet van Kirchhoff voor de component of voor het deelnetwerk. De stroomwet geldt niet alleen voor één knooppunt maar ook voor een deelnetwerk waarin verschillende knooppunten opgenomen werden en dat als een black-box beschouwd wordt.[30] Alleen de uitwendige knooppunten zijn

[30] Zie: https://learn.digilentinc.com/Documents/148

dan van belang. De veralgemeende spanningswet van Kirchhoff (22) kan eveneens voor de uitwendige knooppunten van de black-box geformuleerd worden. De veralgemeende stelling van Tellegen blijkt dus toepasbaar te zijn in domeinen waar met vectoren gerekend wordt. Dit is bijvoorbeeld ook het geval bij de analyse van mechanische structuren

Voor elektrische netwerken bestaat de overdrachtsmatrix $|V_{ij}|$uit elementen met een waarde 0, 1 en -1. Voor de matrixvergelijkingen (21) en (22) zijn de elementen van de overdrachtsmatrix $|V_{ij}|$ echter niet beperkt tot 0, 1 en -1. Dit biedt de mogelijkheid om de theorie der toegevoegde netwerken te veralgemenen tot een theorie der toegevoegde structuren die voor mechanische structuren geldt. Daartoe wordt niet alleen de topologie maar ook de geometrie van de structuur in rekening gebracht.[31] In de verbindingsmatrix $|V_{ij}|$ wordt er dan zowel topologische als geometrische informatie opgenomen.

De stroom- en spanningswet van Kirchhoff zijn analoog aan de evenwichts- en verenigbaarheidsvoorwaarde uit de mechanica en de sterkteleer. Door het invoeren van een veralgemeende overdrachtsmatrix $|V_{ij}|$ kunnen we mechanische structuren met zowel krachten als momenten beschouwen.[32] De stelling der virtuele arbeid die gebruikt wordt voor de analyse van mechanische structuren komt overeen met de veralgemeende stelling van Tellegen.[33] Deze analogie verduidelijkt de stelling der virtuele arbeid. De begrippen 'virtuele arbeid' en 'virtuele verplaatsing' zijn immers niet gemakkelijk te begrijpen.

We hebben er reeds op gewezen dat de stroom- en spanningswet en de stelling van Tellegen geldig blijven indien er Kirchhoff-operatoren op toegepast worden. Interessante voorbeelden voor een netwerk met takken i, stromen I_i en spanningen U_i zijn:

- de 'inhoud' aan energie: $\Sigma_i [\int^I U_i . dI_i] = 0$
- de 'co-inhoud' aan energie: $\Sigma_i [\int^U I_i . dU_i] = 0$

Met de stelling van Tellegen is het bovendien mogelijk om hier een variationeel principe uit af te leiden voor een netwerk bestaande uit 'positieve' weerstanden.[34] De inhoud aan energie van een netwerk is een minimum voor de juiste stroomverdeling over de componenten.[35]

De stelling van Tellegen kan ook veralgemeend worden voor gegeven en toegevoegde systemen. In de stelling van Lee beschouwt men systemen met inputs en outputs, bestaande uit deelsystemen (black-boxes) die door knooppunten en sommatiepunten met elkaar en met de inputs en outputs verbonden zijn. Uitgaande van het gegeven systeem wordt er een toegevoegd systeem geconstrueerd door de inputs en outputs van het systeem en van de

[31] Deze theorie wordt bij mechanische structuren toegepast in: H. Van Belle, *De opbouwmethode en de theorie der toegevoegde strukturen,* Thesis Departement Werktuigkunde, K.U.Leuven, 1974.
[32] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Moment_(mechanica)
[33] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Virtual_work
[34] Voor positieve weerstand geldt dat de spanning niet groter wordt tenzij de stroom toeneemt.
[35] Zie: P. Penfield, R. Spence and S. Duinker*, Tellegen's Theorem and Electrical Networks*, Research Monograph No. 58, The M.I.T Press, Cambridge Massachusetts, 1970, blz. 39-41: https://ia802901.us.archive.org/30/items/TELLEGENSTHEOREMANDELECTRICALNETWORKS/TELLEGEN%27S%20THEOREM%20AND%20ELECTRICAL%20NETWORKS.pdf

deelsystemen om te wisselen. Daarbij worden ook de knooppunten en sommatiepunten omgewisseld.[36] Dit leidt tot een stelling die gelijkaardig is aan de stelling van Tellegen met een abstracte vorm van energie: het product van de inputs van het gegeven systeem met de ouputs van het toegevoegd systeem. Het is opvallend dat de stelling van Lee opduikt bij de gevoeligheidsanalyse van neurale netwerken.

6. De wetten van Kirchhoff en symmetrieën

We hebben er reeds op gewezen dat het spanningsverschil invariant is voor de keuze van referentiepunt. De spanningwet kan ook bewezen worden uitgaande van de invariantie van een verschil van twee spanningen t.o.v. het referentiepunt dat bij de meting van deze spanningen gebruikt wordt.

Beschouw daartoe bijvoorbeeld de knooppunten i, j en k en twee referentiepunten 0 en 0' met spanningen U_{i0}, U_{j0}, U_{k0}, $U_{i0'}$ $U_{j0'}$ en $U_{k0'}$ die op hetzelfde tijdstip bepaald worden. We definiëren vervolgens een spanningsverschil U_{j0} - U_{i0}. Dit spanningsverschil moet invariant zijn ten opzichte van het referentiepunt van de meting:

$U_{j0} - U_{i0} = U_{j0'} - U_{i0'}$

Laten we referentiepunt 0' samenvallen met aansluiting i dan kunnen we als deze vergelijking algemeen geldt schrijven dat:

$U_{j0} - U_{i0} = U_{ji} - U_{ii}$

Daar geen spanningsverschil tussen twee samenvallende knooppunten bestaat mogen we stellen dat $U_{ii} = 0$ en:

$U_{j0} - U_{i0} = U_{ji}$ (23)

Laten we referentiepunt 0' vervolgens samenvallen met het knooppunt j dan vinden op gelijkaardige wijze dat:

$U_{j0} - U_{i0} = U_{j0'} - U_{i0'} = U_{jj} - U_{ii} = -U_{ij}$

Uit de twee voorgaande volgt onmiddellijk dat:

$U_{ji} = -U_{ij}$ (24)

Op een gelijkaardige manier kunnen we voor de knooppunten i en k ook afleiden dat:

$U_{ik} = -U_{ki}$ (25)

---

[36] Meer informatie over de stelling van Lee is te vinden in: A. Lee , *Signal flow graphs-Computer-aided system analysis and sensitivity calculations,* IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 21, issue 2: https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/1083832 en in: http://www.uncini.com/research_activity/pdf/089_neural_computation_00.pdf (blz. 1907).

Uit (23) volgt bovendien dat:

$U_{j0} - U_{i0} - U_{ji} = 0$

Laten we het referentiepunt 0 met de aansluiting k samenvallen dan wordt deze vergelijking omgevormd tot:

$U_{jk} - U_{ik} - U_{ji} = 0$

Rekening houdend met (24) en (25) vinden we tenslotte dat:

$U_{ij} + U_{jk} + U_{ki} = 0$

wat moest bewezen worden. In potentiaalvorm geformuleerd wordt deze vergelijking:

$(P_i - P_j) + (P_j - P_k) + (P_k - Pi) = 0$

Het is merkwaardig dat de spanningswet van Kirchhoff uit de invariantie van spanningverschillen voor de keuze van referentiepunt, een eenvoudige symmetrie, kan afgeleid worden. De potentialen in de knooppunten mogen ook willekeurige waarden aannemen. Dit is eveneens het geval voor de duale maasstromen. Wetten in de vorm van de spanningswet zijn ook in andere disciplines te vinden. In analoge vormen van de spanningswet worden de potentialen door andere grootheden vervangen. De som van de verschillen tussen de waarden van de analoge grootheden is dan gelijk aan nul. Hieruit kunnen we besluiten dat verbindingswetten in de vorm van spanningswet zeer algemeen zijn.

Een eenvoudig voorbeeld van een analoge vorm van de spanningswet is te vinden bij het meten van de posities van drie willekeurige punten op een as. Voor bijvoorbeeld de punten i, j en k en het referentiepunt 0 geldt voor de som van de relatieve posities X_{ij} , X_{jk} en X_{ki}:

$X_{ij} + X_{jk} + X_{ki} = (X_{i0} - X_{j0}) + (X_{j0} - X_{k0}) + (X_{k0} - X_{i0}) = 0$

Ook voor andere meetresultaten kunnen we de vorm van de spanningswet terugvinden. Dit is een merkwaardige conclusie. Als we een X_{i0} , X_{j0} en X_{k0} kunnen meten dan voldoen de verschillen tussen de meetresultaten aan een relatie met de vorm van de wetten van Kirchhoff. Dit verduidelijkt waarom er zoveel analoge vormen van de wetten van Kirchhoff teruggevonden kunnen worden in uiteenlopende disciplines.

Het is ook opvallend dat er een analoge vorm van de spanningwet voor de nummers van de knooppunten van een netwerk geldig is. Inderdaad, voor drie knooppunten i, j en k vinden we bijvoorbeeld een vergelijking die analoog is aan de spanningswet van Kirchhoff met potentaalverschillen:

$(i - j) + (j - k) + (k - i) = 0$

Merk op dat deze vergelijking in feite voor drie willekeurige getallen opgaat. Dit is tevens het geval voor complexe getallen en vectoren. Het gaat telkens om wiskundige identiteiten die eigenlijk geen fysische inhoud hebben. Dit roept fundamentele vragen op.

De op het eerste zicht zeer opmerkelijke vaststelling dat de vorm van de spanningswet overal kan gevonden worden waar we grootheden kunnen meten, maakt het ook mogelijk om in diverse domeinen van de wetenschap stellingen te formuleren die analoog zijn aan de stelling van Tellegen. Daartoe is echter wel vereist dat men paren van veranderlijke kan onderkennen en dat er niet alleen analoge vormen van de spanningswet maar ook van de stroomwet gelden. Men heeft het soms over 'Kirchhoff-netwerken'. We zijn dan in staat om een energiebegrip definiëren en de energetische methodes toe te passen. Dit is ook het geval buiten het domein van de ingenieurswetenschappen. Het gaat dan om energiebegrippen waarin er formeel gezien een analogie met energie uit de en mechanica kan herkend worden maar die er fysisch beschouwd niets mee te maken hebben. Indien er een vorm van orthogonaliteit optreedt kan dit op een analogie met de stelling van Tellegen wijzen.

Bondgrafen bieden een grafisch model voor het beschrijven van elektrische netwerken en van systemen die er analoog aan zijn.[37] Men kan ook gebruik maken van gerichte grafen.[38] De mogelijkheden die de analogieën bieden worden nog onvoldoende benut.

Samengestelde gehelen kunnen totaal andere eigenschappen hebben dan de delen waaruit ze bestaan. Men heeft het dan over een geheel dat meer of anders is dan de som van zijn delen. De meerwaarde van het geheel kan toegeschreven worden aan de verbindingen. Voor netwerken en systemen worden de verbindingen gekenmerkt door hun topologie. Indien de eigenschappen van een geheel niet herleid kunnen worden tot de eigenschappen van de delen en hun verbindingen spreekt men van emergentie.[39] Dit begrip wijst op de grenzen van het reductionisme. Het bestaan van de sterke vorm van emergentie wordt nog betwist.[40]

7. Energetische methodes, behoudswetten en symmetrieën

Het energiebegrip is de 'Steen van Rosetta' van de exacte wetenschappen. Energie slaat brug tussen de verschillende wetenschappelijke domeinen. Er bestaan diverse vormen van energie zoals bijvoorbeeld elektrische energie, mechanische energie en warmte. Deze vormen van energie kunnen in elkaar omgezet worden. De wet van behoud van energie maakte het mogelijk om de verschillende disciplines met elkaar te verbinden en zo multidisciplinaire problemen op te lossen. Met behulp van het energiebegrip kunnen ook globale uitspraken gedaan worden over het gedrag van fysische systemen. Voorbeelden hiervan zijn de eerste en de tweede wet van de thermodynamica.[41]

---

[37] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Bondgraaf en https://en.wikipedia.org/wiki/Bond_graph
[38] Zie: https://www.tutorialspoint.com/network_theory/network_theory_topology.htm
[39] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Emergentie en https://en.wikipedia.org/wiki/Emergence
[40] Meer informatie over deze discussie is te vinden in: http://www.consc.net/papers/emergence.pdf , https://www.closertotruth.com/series/what-strong-emergence en https://vimeo.com/187309870
[41] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Thermodynamics

De thermodynamica kan beschouwd worden als de voorloper van de black-box benadering en de systeemtheorie. In de systeemtheorie speelt het energiebegrip geen noemenswaardige rol. Dit is wel het geval in de netwerk- en structuurtheorie. Wil men de ingenieurswetenschappen unificeren dan is het noodzakelijk om het energiebegrip in te voeren in een geïntegreerde systeem-, netwerk- en structuurtheorie. De stelling van Tellegen is daartoe de gepaste sleutel. Deze aanpak maakt het mogelijk om de methodes tussen de verschillende theorieën uit te wisselen. Een voorbeeld hiervan is de theorie der toegevoegde netwerken voor gevoeligheidsanalyse. Het kan bijvoorbeeld ook interessant zijn om de energetische methodes die gebruikt worden om mechanische structuren te berekenen in andere domeinen toe te passen.

Het lijkt alsof de energetische methodes hun belang verloren hebben in de ingenieurswetenschappen. Met de steeds krachtiger wordende computers kunnen immers berekeningen uitgevoerd worden die vroeger onmogelijk waren. Voor het simuleren van het gedrag van netwerken, structuren en systemen worden daarbij analytische methodes gebruikt. Hun gedrag kan uitgaande van de modellen van de componenten en rekening houdend met de verbindingsvoorwaarden bepaald worden. Het gaat dus om reductionistische methodes. Ze worden onder andere gebruikt om de bouw van prototypes te vermijden in de ontwerpfase van een nieuwe producten.

De energetische methodes spelen toch nog een belangrijke rol in de ingenieurswetenschappen. Dit is bijvoorbeeld het geval in de eindige elementen methode voor de analyse van mechanische structuren.[42] De structuren worden daarbij in kleine elementen verdeeld die in de knooppunten met elkaar verbonden zijn. Om het model van deze elementen te bepalen wordt aangenomen dat ze volgens een bepaalde functie vervormen. Daarbij wordt de stelling der virtuele arbeid toegepast die analoog is aan de stelling van Tellegen.[43] De theorie der toegevoegde structuren kan ook toegepast worden om de berekening van statisch onbepaalde structuren gemakkelijker te maken.[44] Daartoe wordt een toegevoegde structuur ingevoerd waaruit elementen weggelaten werden die de gegeven structuur statisch onbepaald maken.

De stelling van Tellegen is gebaseerd op de stroom- en spanningswet van Kirchhoff en het continuïteitsprincipe en drukt het behoud van energie uit. Behoudswetten worden als fundamentele wetten van de natuur beschouwd.[45] De behoudswetten zoals de wetten van behoud van energie, hoeveelheid van beweging en lading wijzen echter op een diepere grond. Volgens de stelling van Noether bestaat er een overeenkomst tussen behoudswetten en symmetrieën.[46] Een symmetrie laat bepaalde kenmerken van een systeem invariant onder een transformatie.[47] De stelling van Noether maakt het mogelijk om behoudswetten uit invarianten af te leiden.

[42] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method_in_structural_mechanics
[43] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Virtual_work
[44] Informatie over statisch onbepaalde of hyperstatische structuren is te vinden in: https://nl.wikipedia.org/wiki/Statisch_(on)bepaald
[45] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Conservation_law
[46] Zie: https://nl.wikipedia.org/wiki/Stelling_van_Noether en https://en.wikipedia.org/wiki/Noether%27s_theorem
[47] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_(physics)

Om als wet beschouwd te worden moeten wetten overal en altijd geldig te zijn. Indien dit niet het geval zou zijn was het verwerven van objectieve kennis onmogelijk. Iedere observator moet in staat zijn om dezelfde wetten te ontdekken. Volgens de stelling van Noether leidt de invariantie van de wetten van de mechanica voor een verplaatsing in de ruimte bijvoorbeeld naar de wet van behoud van hoeveelheid van beweging. Het is opvallend dat de wetten van de fysica uit eerder filosofische beschouwingen kunnen afgeleid worden. Sommige fysici beschouwen het zoeken naar symmetrieën als één van de belangrijkste taken van de fysica. In de ingenieurswetenschappen wordt het belang van symmetrieën nog onvoldoende onderkend. Symmetrieën bieden de mogelijkheid om de zuiver wiskundige modellen die in de systeemtheorie gebruikt worden meer fysische inhoud te geven.

Het is een grote droom om alle wetenschappen te integreren en tot een samenhangend geheel te unificeren.[48] De netwerk-, structuur- en systeemtheorie kan hierbij een belangrijke rol spelen. Deze theorieën blijken ook buiten de ingenieurswetenschappen toepasbaar. Hun uitgangspunten zijn immers zeer algemeen. Zoals reeds opgemerkt werd duiken er verbindingswetten met de vorm van de spanningswet van Kirchhoff in veel domein van de wetenschap op. Dit is ook het geval voor de stroomwet van Kirchhoff, het continuïteitsprincipe en de stelling van Tellegen. De stroomwet en het continuïteitsprincipe zijn verwant met de behoudswetten.[49] Deze algemene visies bieden nog onvoldoende benutte mogelijkheden voor het verenigen van de wetenschappen. De in deze tekst voorgestelde veralgemeende netwerk-, structuur- en systeemtheorie geven ook elementen om deze theorieën axiomatisch te structureren en daarbij uit te gaan van symmetrieën.

De exacte wetenschappen zijn op een aantal meestal onuitgesproken aannames gebaseerd. Voorbeelden hiervan zijn de herhaling van dingen en verschijnselen in ruimte en tijd, het bestaan van wetmatigheden, de 'onredelijke effectiviteit van de wiskunde', het succes van de reductionistische methodes en de vooronderstelling dat de werkelijkheid begrijpbaar is. In deze tekst hebben we gewezen op de merkwaardig eenvoudige lineaire en duale vorm van de verbindingsvoorwaarden, de zeer algemene energetische methodes, de vormen van orthogonaliteit die in veel disciplines te vinden zijn en de analogie tussen verschillende wetenschappen. Het blijkt mogelijk om een axiomatisch opgebouwde veralgemeende netwerk-, structuur- en systeemtheorie te ontwikkelen die gebaseerd is op symmetrieën. De invariantie van de spanning tussen twee kooppunten voor de keuze van het referentiepunt bij een meting en de dualiteit tussen de stroom- en spanningswetten van Kirchhoff zijn voorbeelden van symmetrie.

Vooral in de deeltjesfysica hecht men veel belang aan symmetrieën en de mogelijkheden die zij bieden om er wetten uit af te leiden en om fundamentele deeltjes te voorspellen. Blijkbaar liggen er onder de wetten van fysica diepere beginselen verborgen. Dit alles roept

[48] Zie i.v.m. de eenheid van de wetenschap: https://en.wikipedia.org/wiki/Unity_of_science en https://plato.stanford.edu/entries/scientific-unity

[49] Zie: https://en.wikipedia.org/wiki/Conservation_law en https://en.wikipedia.org/wiki/Continuity_equation . Het continuïteitsprincipe gaat samen met behoudswetten: https://en.wikipedia.org/wiki/Conservation_law#Global_and_local_conservation_laws

fundamentele vragen op zoals waarom is de wiskunde bruikbaar en de werkelijkheid intelligibel. Het is onredelijk dat de werkelijkheid redelijk blijkt. De diepere aard van de werkelijkheid blijkt mysterieus te zijn. Op de ultieme vragen over de werkelijkheid is binnen de wetenschap geen antwoord te vinden.

Hubert Van Belle

6/10/2019
4/11/2019
13/01/2020

Appendix 1: Afleiding van de stelling van Tellegen

Beschouwen een serieschakeling met een bron en twee passieve componenten die in de knooppunten 1, 2 en 3 met elkaar verbonden zijn. Voor de serieschakeling gelden volgens de wetten van Kirchhoff en het continuïteitsprincipe[50] de volgende verbindingsvoorwaarden:

$U_{13} = U_{12} + U_{23}$
$- I_{13} = I_{12} = - I_{21} = I_{23}$

Rekening houdend met de definitie van spanning:

$U_{13} = P_1 - P_3$
$U_{12} = P_1 - P_2$
$U_{23} = P_2 - P_3$

vinden we voor de spanningen over de componenten de volgende vergelijking in matrixvorm:

$$\begin{vmatrix} U_{13} \\ U_{12} \\ U_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix}$$

Deze vergelijking kan met de getransponeerde van de verbindingsmatrix |A|compacter geschreven worden als:

$|U| = |A|^t.|P|$

Volgens de stroomwet en het continuïteitsprincipe geldt voor de stromen in de drie knooppunten:

$I_{13} + I_{12} = 0$
$- I_{12} + I_{23} = 0$
$- I_{13} - I_{23} = 0$

en bekomen we in matrixvorm:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} I_{13} \\ I_{12} \\ I_{23} \end{vmatrix} = |0|$$

Met de verbindingsmatrix |A| leidt deze vergelijking tot :

$|A|.|I| = |0|$

De getransponeerde $|A|^t$ van |A| wordt bekomen door de rijen en kolommen van |A| om te wisselen.

---

[50] De stroomwet van Kirchhoff kan beschouwd worden als een bijzonder geval van het continuïteitsprincipe en komt overeen met de wet van behoud van lading. Er wordt geen lading opgeslagen in een knooppunt.

Uit de definitie van spanning en de stroomwet kunnen we de stelling van Tellegen als volgt afleiden:

$|U|^t.|I| = [|A|^t.|P|]^t.|I| = [|P|^t.|A|].|I| = |P|^t.[|A|.|I|] = 0$

We kunnen hieruit besluiten dat:

$|U|^t.|I| = 0$

Merk op dat stelling van Tellegen op een gelijkaardige wijze kan bewezen worden als we de potentialen van de knoopunten vervangen door de spanningen van deze knooppunten die ten opzichte van een willekeurig referentiepunt 0 gemeten worden.

Met spanningen U_{10}, U_{20} en U_{30} vinden we volgens de spanningswet dat de spanningen over de componenten gelijk zijn aan:

$U_{13} = U_{10} - U_{30}$
$U_{12} = U_{10} - U_{20}$
$U_{23} = U_{20} - U_{30}$

Hieruit volgt een matrixvergelijking waarin de getransponeerde van de verboindingsmatrix verschijnt:

$$\begin{vmatrix} U_{13} \\ U_{12} \\ U_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{vmatrix}$$

De matrixvergelijking die hieruit volgt:

$|U| = |A|^t.|U_0|$

komt dus overeen met:

$|U| = |A|^t.|P|$

Om de stelling van Tellegen te bewijzen bewezen vervangen we $|P|$ door $|U_0|$:

$|U|^t.|I| = [|A|^t.|U_0|]^t.|I| = [|U_0|^t.|A|].|I| = |P|^t.[|A|.|I|] = 0$

Appendix 2: Verbindingsmatrix voor een serieschakeling

Beschouwen een serieschakeling met een bron en twee passieve componenten die in de knooppunten 1, 2 en 3 met elkaar verbonden zijn. De spanningen U_{10}, U_{20} en U_{30} van deze knooppunten worden ten opzichte van een referentiepunt 0 gemeten. Voor de serieschakeling gelden volgens de wetten van Kirchhoff en het continuïteitsprincipe de volgende verbindingsvoorwaarden:

$U_{13} = U_{12} + U_{23}$
$- I_{13} = I_{12} = - I_{21} = I_{23}$

Rekening houdend met:

$U_{13} = U_{10} - U_{30}$
$U_{12} = U_{10} - U_{20}$
$U_{23} = U_{20} - U_{30}$

vinden we voor de spanningen over de componenten in matrixvorm met $|A|^t$:

$$\begin{vmatrix} U_{13} \\ U_{12} \\ U_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{vmatrix}$$

Dit wordt in de volgende figuur verduidelijkt:

```
                                |U13|
                  |------------------------------------------------->|
                  |          |U23|          |         |U12|          |
                  |--------------------------->|---------------------->|
                  |                            |                     |
-------------------------------------------------------------------------------------------->
|     |U30|       |                            |                     |
|---------------->|                            |                     |
|                   |U20|                      |                     |
|--------------------------------------------->|                     |
|                            |U10|                                    |
|--------------------------------------------------------------------->|
```

Voor de stromen in de componenten geldt:

$I_{13} + I_{12} = 0$
$-I_{12} + I_{23} = 0$
$-I_{13} - I_{23} = 0$

De stroomwetten voor de drie knooppunten worden dan in matrixvorm met $|A|$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} I_{13} \\ I_{12} \\ I_{23} \end{vmatrix} = |0|$$

De matrix $|A|^t$ is de getransponeerde van de verbindingsmatrix $|A|$. De rijen en kolommen van $|A|$ werden omgewisseld zodat:

$A^t_{ij} = A_{ji}$

Het is opvallend dat er in de matrices $|A|$ en $|A|^t$ een gelijk aantal elementen 1 en - 1 te vinden zijn. Een rij van $|A|^t$ bestaat uit nullen en een paar 1 en -1. Dit volgt uit de spanningswet voor het spanningsverschil tussen twee knoopunten.